

# HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG TIKZ, TKZ-EUCLIDE VẼ HÌNH & TKZ-TAB VẼ BẢNG BIẾN THIÊN

HỒ HÀ ĐẶNG Ơ HỨA ĐỨC SINH

2/2018

## MỤC LỤC

<b>I</b>	<b>Vẽ đồ thị bằng TikZ</b>	<b>4</b>
1	Bắt đầu	4
1.1	Hệ trục là quan trọng nhất	4
1.2	Thêm nữa	7
1.2.1	Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$	7
1.2.2	Hàm số $y = x^4 - x^2 - 2$	8
1.3	Hàm lượng giác $y = \sin x$	9
2	Nâng cao	9
2.1	Tô miền tích phân	9
2.2	Hàm phân thức	14
2.3	Tạo lưới	18
3	Phóng to thu nhỏ bằng tùy chọn scale	18
4	Chỉ dẫn thêm các thuộc tính	20
4.1	Tô màu	20
4.2	Tô sọc	20
4.3	Tùy chọn vị trí	21
<b>II</b>	<b>Vẽ hình học phẳng bằng tkz-euclide</b>	<b>21</b>
5	Mở đầu	21
6	Nâng cao	22
6.1	Vẽ hệ điểm cơ bản	22
6.2	Vẽ đường tròn	23
6.3	Vẽ giao điểm	24
6.4	Đánh dấu góc	26
6.5	Đường tròn ngoại tiếp	27
6.6	Đặt tên cho đẹp	28
7	Các lệnh cơ sở cho phép chiếu và phép biến hình	31
7.1	Phép dựng song song	31
7.2	Phép chiếu vuông góc	31
7.3	Phép biến hình	32
7.3.1	Tịnh tiến	32
7.3.2	Quay	32

7.3.3	Đối xứng tâm . . . . .	33
7.3.4	Đối xứng trục . . . . .	33
7.3.5	Vị tự . . . . .	34
7.3.6	Tổng hợp . . . . .	35
8	Các điểm đặc biệt và đường đặc biệt trong tam giác . . . . .	35
8.1	Trung điểm . . . . .	35
8.2	Trọng tâm . . . . .	35
8.3	Tâm đường tròn ngoại tiếp . . . . .	35
8.4	Tâm đường tròn nội tiếp . . . . .	35
8.5	Trục tâm . . . . .	35
8.6	Đường cao . . . . .	35
8.7	Đường trung tuyến . . . . .	36
8.8	Đường phân giác . . . . .	36
8.9	Đường trung trực . . . . .	36
9	Thực hành . . . . .	36

### III Vẽ hình học không gian bằng tkz-euclide & TikZ 37

10	Mở đầu . . . . .	38
11	Hình chóp, hình lăng trụ . . . . .	41
12	Hình nón, hình trụ . . . . .	43
13	Một số ví dụ minh họa . . . . .	47
13.1	Nón trụ cầu . . . . .	47
13.2	Các khối đa diện đều . . . . .	50
13.3	Thư viện “Angle Library” . . . . .	53
13.4	Tô miền bằng <code>\fillbetween</code> . . . . .	55

### IV Sử dụng gói tkz-tab vẽ bảng biến thiên 56

14	Giới thiệu . . . . .	56
15	Khai báo gói lệnh . . . . .	56
16	Cách sử dụng . . . . .	56
16.1	Các tùy chọn trong <code>tkzTabInit</code> . . . . .	57
16.2	Các đối số quan trọng trong <code>tkzTabLine</code> . . . . .	57
16.3	Các định dạng quan trọng trong <code>tkzTabVar</code> . . . . .	60
17	Mẫu một số bảng xét dấu . . . . .	63
17.1	Hàm số bậc nhất $y = f(x) = ax + b$ ( $a \neq 0$ ) . . . . .	63
17.2	Hàm số bậc hai $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ( $a \neq 0$ ) . . . . .	63
18	Mẫu một số bảng biến thiên . . . . .	64
18.1	Hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ( $a \neq 0$ ) . . . . .	64
18.2	Hàm trùng phương $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ( $a \neq 0$ ) . . . . .	67
18.3	Hàm phân thức $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $c \neq 0$ và $ad - bc \neq 0$ . . . . .	69
18.4	Hàm phân thức $y = f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ với $ad \neq 0$ và $a\left(\frac{-e}{d}\right)^2 + b\left(\frac{-e}{d}\right) + c \neq 0$ . . . . .	70
19	Tạm kết . . . . .	72
20	Tài liệu tham khảo . . . . .	72

## ABSTRACT

Tài liệu nhỏ này hy vọng sẽ giúp ích thầy cô khi vẽ hình bằng TikZ và tkz-euclide, cũng như vẽ bảng biến thiên bằng gói tkz-tab.

Phần 1. Vẽ đồ thị bằng TikZ

Phần 2. Vẽ hình bằng gói tkz-euclide

Phần 3. Vẽ hình không gian

Phần 4. Dùng gói tkz-tab để vẽ bảng biến thiên

---

\* Thạc sĩ Hồ Hà Dạng - Trường Hòa Bình - Tân Phú - HCMc

<sup>1</sup> hadang.math@gmail.com - <https://www.facebook.com/thaydangtoan>

\* Thầy Hứa Đức Sinh - Quảng Nam

<sup>2</sup> <https://www.facebook.com/hdsinh>

# Phần I.

## Vẽ đồ thị bằng TikZ

### 1 BẮT ĐẦU

Những việc cần làm đầu tiên là nạp gói. Ta chỉ cần nạp đủ xài, khi nào thiếu ta nạp tiếp. Hiện giờ ta cần:

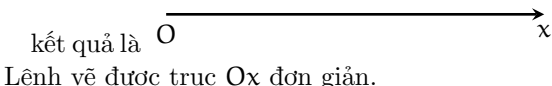
```
\usepackage{tkz-euclide}
\usetkzobj{all}
\usepackage{tikz,tkz-tab,tkz-linknodes}
\usetikzlibrary{calc}
```

Gói Euclide có thể chưa dùng tới. Nhưng ta nạp sẵn và “để dành”. Các bước:

1. Tạo file đơn giản
2. Copy code đơn giản
3. Chạy thử nghiệm

File mẫu đơn giản ta copy như sau:

<pre>\documentclass[12pt,a4paper]{article} \usepackage[utf8]{vietnam} \usepackage{tkz-euclide} \usetkzobj{all} \usepackage{tikz,tkz-tab,tkz-linknodes} \begin{document} \begin{tikzpicture}[&gt;=stealth]</pre>	<pre>\draw[-&gt;,line width = 1pt] (0,0)% node[below]{\$O\$}--(5,0) node[below]{\$x\$}; \end{tikzpicture} \end{document}</pre>
---	--



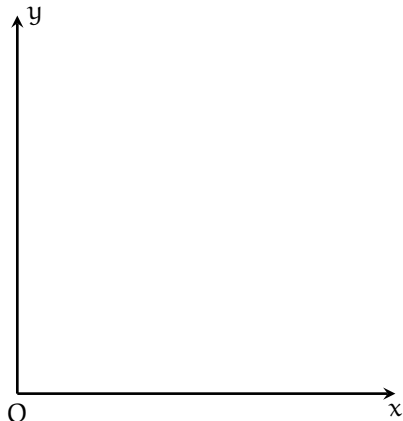
kết quả là O

Lệnh vẽ được trục Ox đơn giản.

Ta dừng lại đôi chút để có căn bản. Lệnh `\begin{tikzpicture}[>=stealth]` và `\end{tikzpicture}` là mở đầu và kết thúc của một hình TikZ. Các tùy chọn nằm trong dấu [...] và ở đây là tùy chọn mũi tên theo kiểu stealth. Lệnh `\draw` là lệnh vẽ cơ sở. Tùy chọn vẽ mũi tên, độ dày 1pt từ điểm (0,0) đến (5,0); lệnh `node[below]` sẽ gán nhãn phía trên hoặc các tùy chọn khác tại điểm có tọa độ tương ứng.

#### 1.1 Hệ trục là quan trọng nhất

Vừa dựng được trục Ox, giờ ta tiếp với trục Oy.

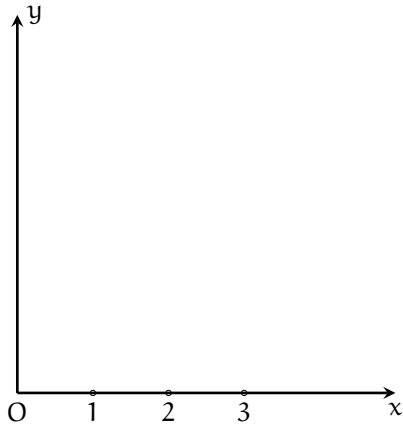


```

\begin{tikzpicture}[>=stealth]
\draw[->,line width = 1pt] (0,0) node[below]{$O$}--(5,0) node[below]{$x$};
\draw[->,line width = 1pt] (0,0) --(0,5) node[right]{$y$};
\end{tikzpicture}

```

Quá dễ đúng không? Vậy lệnh lấy điểm trên trục như thế nào. Ở đây liên quan đến vòng lặp. Tuy nhiên việc vẽ một điểm rời rạc nào đó trên hệ trục thì không còn gì dễ hơn.



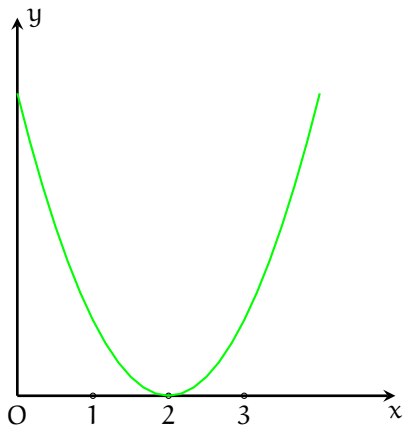
```

\begin{tikzpicture}[>=stealth]
\draw[->,line width = 1pt] (0,0) node[below]{$O$}--(5,0) node[below]{$x$};
\draw[->,line width = 1pt] (0,0) --(0,5) node[right]{$y$};
\draw (1,0) node[below]{$1$} circle (1pt);
\draw (2,0) node[below]{$2$} circle (1pt);
\draw (3,0) node[below]{$3$} circle (1pt);
\end{tikzpicture}

```

Vòng lặp sẽ được hướng dẫn ở mục 1.2.

Sau đây không phải đợi lâu, ta thử vẽ đồ thị hàm số nào!

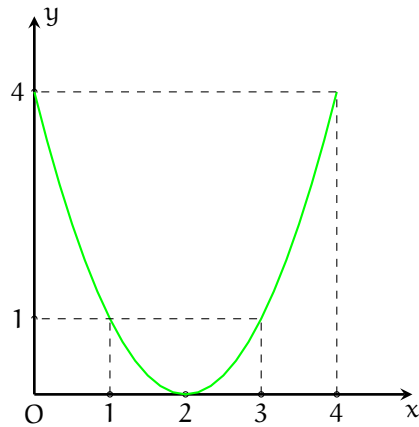


```

\begin{tikzpicture}[>=stealth]
\draw[->,line width = 1pt] (0,0) node[below]{$O$}--(5,0) node[below]{$x$};
\draw[->,line width = 1pt] (0,0) --(0,5) node[right]{$y$};
\draw (1,0) node[below]{$1$} circle (1pt);
\draw (2,0) node[below]{$2$} circle (1pt);
\draw (3,0) node[below]{$3$} circle (1pt);
\draw [green, thick, domain=0:4] plot (\x, {(\x)^2-4*\x+4});
\end{tikzpicture}

```

Thử tạo đường kẻ đứt để nối các điểm nào!

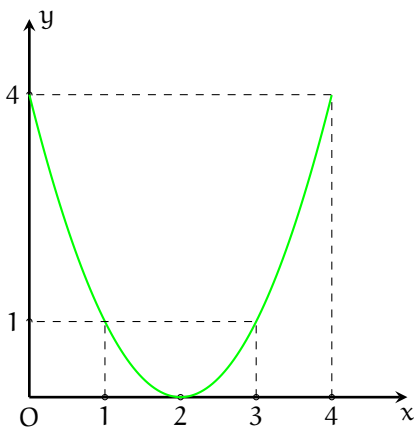


```

\begin{tikzpicture}[>=stealth]
\draw[->,line width = 1pt] (0,0) node[below]{$O$}--(5,0) node[below]{$x$};
\draw[->,line width = 1pt] (0,0) --(0,5) node[right]{$y$};
\draw (1,0) node[below]{$1$} circle (1pt);
\draw (2,0) node[below]{$2$} circle (1pt);
\draw (3,0) node[below]{$3$} circle (1pt);
\draw (4,0) node[below]{$4$} circle (1pt);
\draw [green, thick, domain=0:4] plot (\x, {(\x)^2-4*\x+4});
\draw [dashed] (3,0)--(3,1)--(0,1) node[left]{$1$} circle(1pt);
\draw [dashed] (1,0)--(1,1);
\draw [dashed] (4,0)--(4,4)--(0,4) node[left]{$4$} circle(1pt);
\end{tikzpicture}

```

Ồ, nhìn có vẻ không “smooth” lắm, đứt đứt sao ấy. Vậy ta “smoothie” nó nhé.



```

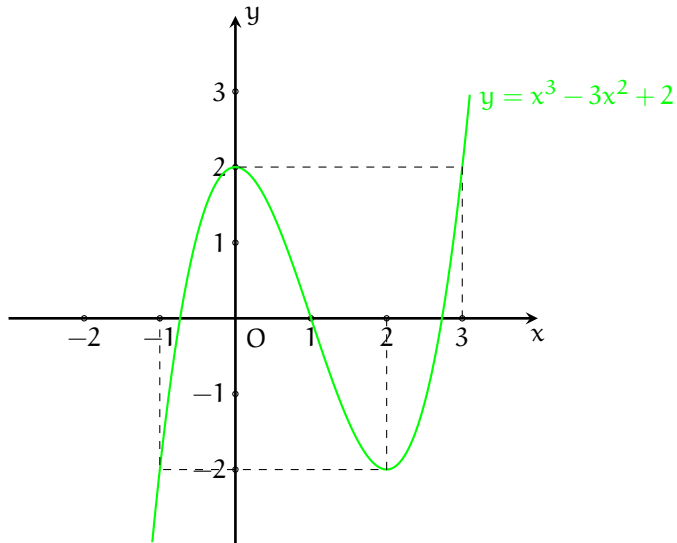
\begin{tikzpicture}[>=stealth]
\draw[->,line width = 1pt] (0,0) node[below]{$O$}--(5,0) node[below]{$x$};
\draw[->,line width = 1pt] (0,0) --(0,5) node[right]{$y$};
\draw (1,0) node[below]{$1$} circle (1pt);
\draw (2,0) node[below]{$2$} circle (1pt);
\draw (3,0) node[below]{$3$} circle (1pt);
\draw (4,0) node[below]{$4$} circle (1pt);
\draw [green, thick, domain=0:4, samples=100] plot (\x, {(\x)^2-4*\x+4});
\draw [dashed] (3,0)--(3,1)--(0,1) node[left]{$1$} circle(1pt);
\draw [dashed] (1,0)--(1,1);
\draw [dashed] (4,0)--(4,4)--(0,4) node[left]{$4$} circle(1pt);
\end{tikzpicture}

```

## 1.2 Thêm nữa

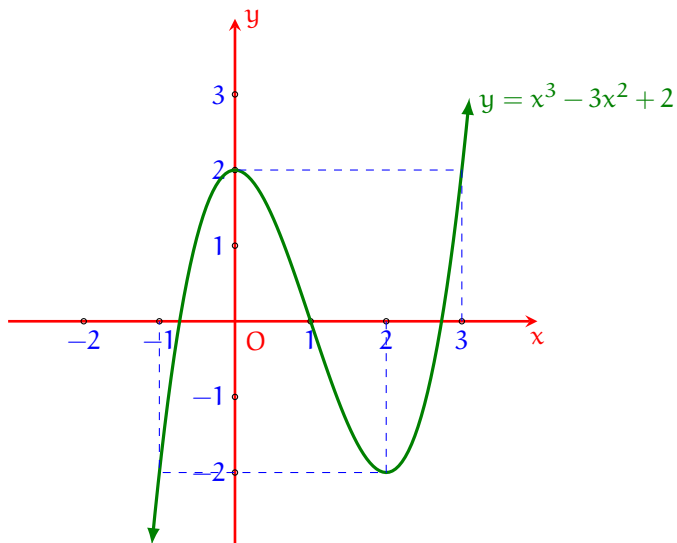
Thử đồ thị của một số hàm phức tạp hơn nào! Cứ nghĩ đơn giản như vừa rồi thôi. Hệ trục, điểm và đồ thị.

### 1.2.1 Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$



```
\begin{tikzpicture}[>=stealth]
\draw[->,line width = 1pt] (-3,0)--(0,0) node[below right]{$O$}--(4,0) node[below]{$x$};
\draw[->,line width = 1pt] (0,-3) --(0,4) node[right]{$y$};
\foreach \x in {-2,-1,1,2,3}{
\draw (\x,0) node[below]{$\x$} circle (1pt);
\draw (0,\x) node[left]{$\x$} circle (1pt);
}
\draw [green, thick, domain=-1.1:3.1, samples=100] %
plot (\x, {(\x)^3-3*(\x)^2+2}) node[right]{$y=x^3-3x^2+2$};
\draw [dashed] (2,0)--(2,-2)--(0,-2)--(-1,-2)--(-1,0);
\draw [dashed] (3,0)--(3,2)--(0,2);
\end{tikzpicture}
```

Thêm chút màu mè nào, có thể thích dày hơn được không?



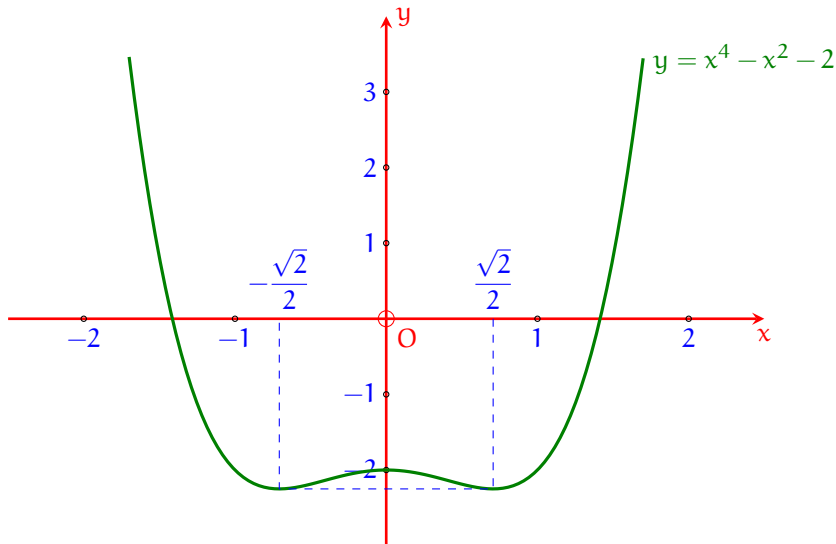
```

\begin{tikzpicture}[>=stealth]
\draw[->,line width = 1pt,red] (-3,0)--(0,0) node[below right]{$O$}--(4,0) node[below]{$x$};
\draw[->,line width = 1pt,red] (0,-3) --(0,4) node[right]{$y$};
\foreach \x in {-2,-1,1,2,3}{
\draw (\x,0) node[below,blue]{$\x$} circle (1pt);
\draw (0,\x) node[left,blue]{$\x$} circle (1pt);
}
\draw [green!50!black, line width = 1.2pt, domain=-1.1:3.1, samples=100,<->,>=latex] %
plot (\x, {(\x)^3-3*(\x)^2+2}) node[right]{$y=x^3-3x^2+2$};
\draw [dashed,blue] (2,0)--(2,-2)--(0,-2)--(-1,-2)--(-1,0);
\draw [dashed,blue] (3,0)--(3,2)--(0,2);
\end{tikzpicture}

```

### 1.2.2 Hàm số $y = x^4 - x^2 - 2$

Ta có thể tạo 2 vòng lặp để chạy trên từng trục. Thử tạo vòng tròn đẹp đẹp chỗ gốc tọa độ.



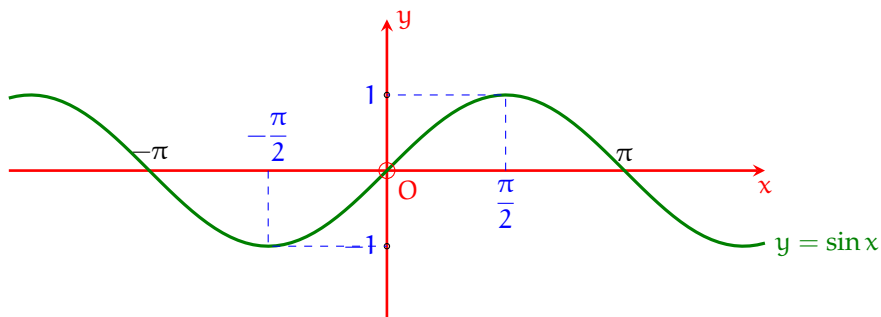
```

\begin{tikzpicture}[>=stealth,x=2cm,y=1cm]
\draw[->,line width = 1pt,red] (-2.5,0)--(0,0)%
node[below right]{$O$}--(2.5,0) node[below]{$x$};
\draw[->,line width = 1pt,red] (0,-3) --(0,4) node[right]{$y$};
\foreach \x in {-2,-1,1,2}{
\draw (\x,0) node[below,blue]{$\x$} circle (1pt);%Ox
}
\foreach \y in {-2,-1,1,2,3}{
\draw (0,\y) node[left,blue]{$\y$} circle (1pt);%Oy
}
\draw [green!50!black, line width = 1.2pt, domain=-1.7:1.7, samples=100]%
plot (\x, {(\x)^4-(\x)^2-2}) node[right]{$y=x^4-x^2-2$};
\draw [dashed,blue] (.707,0) node[above]{$\frac{\sqrt{2}}{2}$}%
--(.707,-2.25)--(-.707,-2.25)--(-.707,0)
node[above]{$-\frac{\sqrt{2}}{2}$};
\draw[fill=none,red] (0,0) circle(3pt);
\end{tikzpicture}

```



### 1.3 Hàm lượng giác $y = \sin x$



```

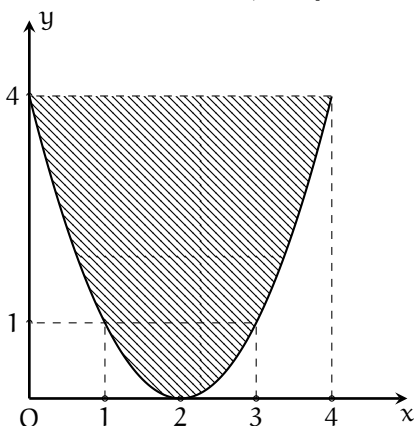
\begin{tikzpicture}[>=stealth,x=1cm,y=1cm]
\draw[->,line width = 1pt,red] (-5,0)--(0,0)%
node[below right]{$O$}--(5,0) node[below]{$x$};
\draw[->,line width = 1pt,red] (0,-2) --(0,2) node[right]{$y$};
\draw (-3.14,0) node[above]{$-\pi$} (3.14,0) node[above]{$\pi$};
\foreach \y in {-1,1}{
\draw (0,\y) node[left,blue]{$\y$} circle (1pt);%Oy
}
\draw [green!50!black, line width = 1.2pt, domain=-5:5, samples=100]%
plot (\x, {\sin(\x*180/pi)}) node[right]{$y=\sin x$};
\draw [dashed,blue] (-1.57,0) node[above]{$-\frac{\pi}{2}$}--(-1.57,-1)--(0,-1);
\draw [dashed,blue] (1.57,0) node[below]{$\frac{\pi}{2}$}--(1.57,1)--(0,1);
\draw[fill=none,red] (0,0) circle(3pt);
\end{tikzpicture}

```

## 2 NÂNG CAO

### 2.1 Tô miền tích phân

Chỉ một lệnh đơn giản `\draw[pattern = ...]`

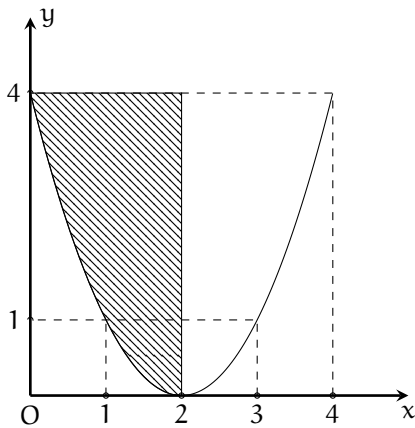


```

\begin{tikzpicture}[>=stealth]
\draw[->,line width = 1pt] (0,0) node[below]{$O$}--(5,0) node[below]{$x$};
\draw[->,line width = 1pt] (0,0) --(0,5) node[right]{$y$};
\draw (1,0) node[below]{$1$} circle (1pt);
\draw (2,0) node[below]{$2$} circle (1pt);
\draw (3,0) node[below]{$3$} circle (1pt);
\draw (4,0) node[below]{$4$} circle (1pt);
\draw [pattern = north west lines, thick, domain=0:4, samples=100] plot (\x, {(\x)^2-4*\x+4});
\draw [dashed] (3,0)--(3,1)--(0,1) node[left]{$1$} circle(1pt);
\draw [dashed] (1,0)--(1,1);
\draw [dashed] (4,0)--(4,4)--(0,4) node[left]{$4$} circle(1pt);
\end{tikzpicture}

```

Nếu chỉ muốn tô một nửa thì sao? Ta vẽ parabol dần dần nhé!

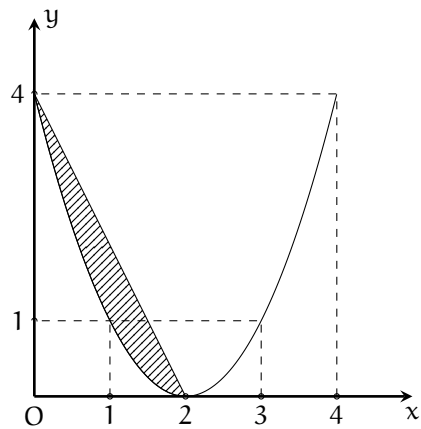


```

\begin{tikzpicture}[>=stealth]
\draw[->,line width = 1pt] (0,0) node[below]{$O$}--(5,0) node[below]{$x$};
\draw[->,line width = 1pt] (0,0) --(0,5) node[right]{$y$};
\draw (1,0) node[below]{$1$} circle (1pt);
\draw (2,0) node[below]{$2$} circle (1pt);
\draw (3,0) node[below]{$3$} circle (1pt);
\draw (4,0) node[below]{$4$} circle (1pt);
\draw [samples=100, domain=0:4] plot (\x, {(\x)^2-4*\x+4});
\fill [draw, pattern = north west lines](2,0) parabola (0,4)--(2,4)--cycle;
\draw [dashed] (3,0)--(3,1)--(0,1) node[left]{$1$} circle(1pt);
\draw [dashed] (1,0)--(1,1);
\draw [dashed] (4,0)--(4,4)--(0,4) node[left]{$4$} circle(1pt);
\end{tikzpicture}

```

Hoặc một phần.

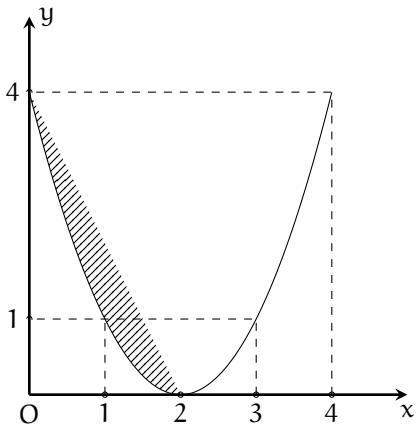


```

\begin{tikzpicture}[>=stealth]
\draw[->,line width = 1pt] (0,0) node[below]{$O$}--(5,0) node[below]{$x$};
\draw[->,line width = 1pt] (0,0) --(0,5) node[right]{$y$};
\draw (1,0) node[below]{$1$} circle (1pt);
\draw (2,0) node[below]{$2$} circle (1pt);
\draw (3,0) node[below]{$3$} circle (1pt);
\draw (4,0) node[below]{$4$} circle (1pt);
\draw [samples=100, domain=0:4] plot (\x, {(\x)^2-4*\x+4});
\fill [draw, pattern = north east lines](2,0) parabola (0,4)--cycle;
\draw [dashed] (3,0)--(3,1)--(0,1) node[left]{$1$} circle(1pt);
\draw [dashed] (1,0)--(1,1);
\draw [dashed] (4,0)--(4,4)--(0,4) node[left]{$4$} circle(1pt);
\end{tikzpicture}

```

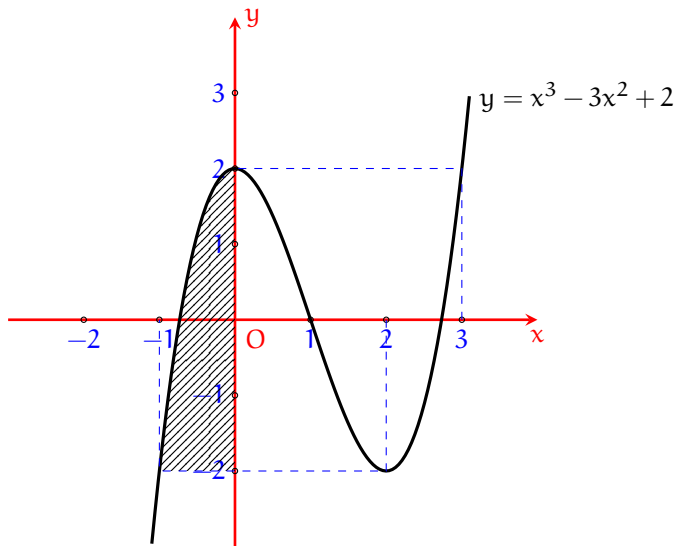
Nếu không muốn đường “viên”. Các tùy chọn khác mời đọc phần 4.



```

\begin{tikzpicture}[>=stealth]
\draw[->,line width = 1pt] (0,0) node[below]{$O$}--(5,0) node[below]{$x$};
\draw[->,line width = 1pt] (0,0) --(0,5) node[right]{$y$};
\draw (1,0) node[below]{$1$} circle (1pt);
\draw (2,0) node[below]{$2$} circle (1pt);
\draw (3,0) node[below]{$3$} circle (1pt);
\draw (4,0) node[below]{$4$} circle (1pt);
\draw [samples=100, domain=0:4] plot (\x, {(\x)^2-4*\x+4});
\fill [draw=none, pattern = north east lines](2,0) parabola (0,4)--cycle;
\draw [dashed] (3,0)--(3,1)--(0,1) node[left]{$1$} circle(1pt);
\draw [dashed] (1,0)--(1,1);
\draw [dashed] (4,0)--(4,4)--(0,4) node[left]{$4$} circle(1pt);
\end{tikzpicture}

```

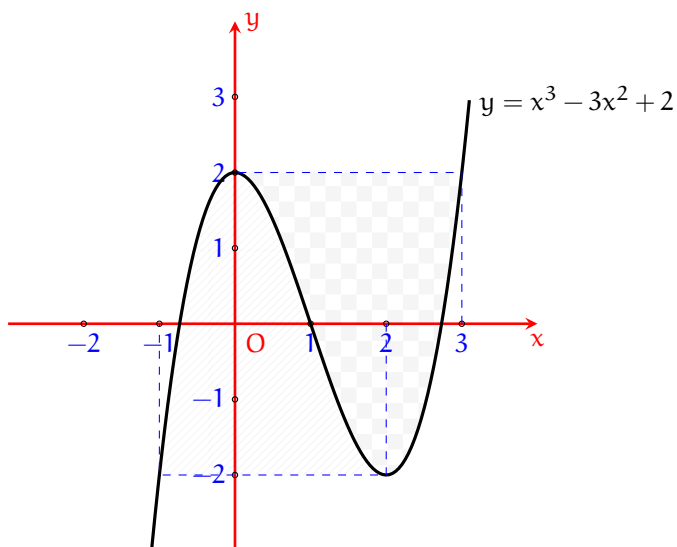


```

\begin{tikzpicture}[>=stealth]
\draw[->,line width = 1pt,red] (-3,0)--(0,0) node[below right]{$O$}--(4,0) node[below]{$x$};
\draw[->,line width = 1pt,red] (0,-3) --(0,4) node[right]{$y$};
\foreach \x in {-2,-1,1,2,3}{
\draw (\x,0) node[below,blue]{$\x$} circle (1pt);
\draw (0,\x) node[left,blue]{$\x$} circle (1pt);
}
\draw [line width = 1.2pt, domain=-1.1:3.1, samples=100,>=latex]%
plot (\x, {(\x)^3-3*(\x)^2+2}) node[right]{$y=x^3-3x^2+2$};
\draw[pattern = north east lines, line width = 1.2pt,draw=none] (-1,-2)%
plot[domain=-1:0] (\x, {(\x)^3-3*(\x)^2+2})--(0,2) -- (0,-2)--cycle;
\draw [dashed,blue] (2,0)--(2,-2)--(0,-2)--(-1,-2)--(-1,0);
\draw [dashed,blue] (3,0)--(3,2)--(0,2);
\end{tikzpicture}

```

Hoặc muốn rõ hơn?



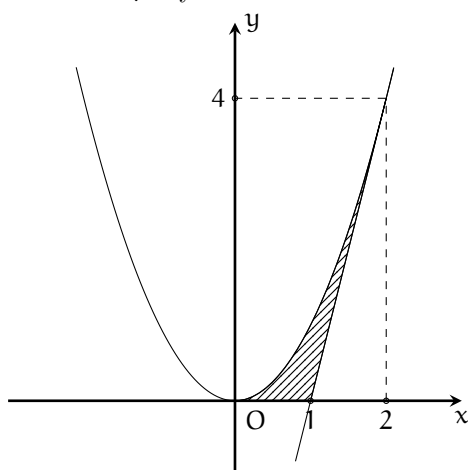
```

\begin{tikzpicture}[>=stealth]
\draw[->,line width = 1pt,red] (-3,0)--(0,0) node[below right]{$O$}--(4,0) node[below]{$x$};
\draw[->,line width = 1pt,red] (0,-3) --(0,4) node[right]{$y$};
\foreach \x in {-2,-1,1,2,3}{
\draw (\x,0) node[below,blue]{$\x$} circle (1pt);
\draw (0,\x) node[left,blue]{$\x$} circle (1pt);
}
\draw [line width = 1.2pt, domain=-1.1:3.1, samples=100,>=latex]%
plot (\x, {\x^3-3*\x^2+2}) node[right]{$y=x^3-3x^2+2$};
\draw[pattern = north east lines,opacity=.2, line width = 1.2pt,draw=none] (-1,-2)%
plot[domain=-1:2] (\x, {\x^3-3*\x^2+2})--(2,-2)--cycle;
\draw[pattern = checkerboard,opacity=.2, line width = 1.2pt,draw=none] (0,2)%
plot[domain=0:3] (\x, {\x^3-3*\x^2+2})--(3,2)--cycle;

\draw [dashed,blue] (2,0)--(2,-2)--(0,-2)--(-1,-2)--(-1,0);
\draw [dashed,blue] (3,0)--(3,2)--(0,2);
\end{tikzpicture}

```

Thêm ví dụ đây:

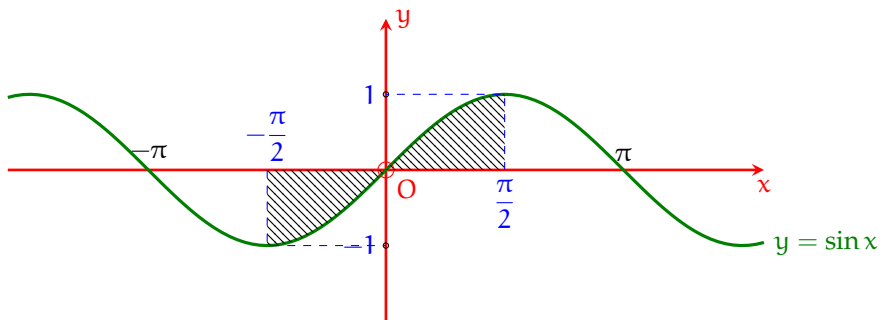


```

\begin{tikzpicture}[>=stealth]
\draw[->,line width = 1pt] (-3,0)--(0,0) node[below right]{$O$}--(3,0) node[below]{$x$};
\draw[->,line width = 1pt] (0,-1)--(0,5) node[right]{$y$};
\draw (1,0) node[below]{$1$} circle (1pt);
\draw (2,0) node[below]{$2$} circle (1pt);
\draw (0,4) node[left]{$4$} circle (1pt);
\draw [samples=100, domain=-2.1:2.1] plot (\x, {(\x)^2});
\draw [samples=100, domain=0.8:2.1] plot (\x, {4*\x-4});
\fill [draw, pattern = north east lines](0,0) parabola (2,4)--(1,0)--cycle;
\draw [dashed] (2,0)--(2,4)--(0,4);
\end{tikzpicture}

```

**Hàm lượng giác  $y = \sin x$**



```

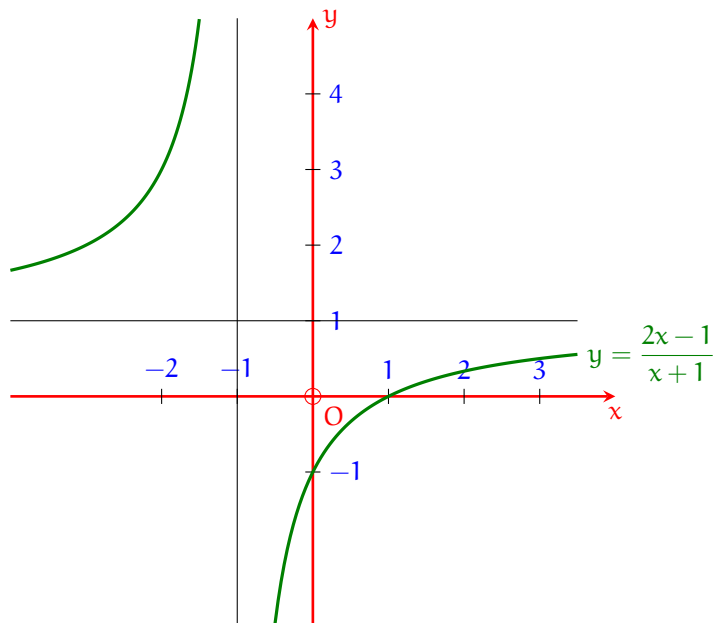
\begin{tikzpicture}[>=stealth,x=1cm,y=1cm]
\draw[->,line width = 1pt,red] (-5,0)--(0,0)%
node[below right]{$O$}--(5,0) node[below]{$x$};
\draw[->,line width = 1pt,red] (0,-2)--(0,2) node[right]{$y$};
\draw (-3.14,0) node[above]{$-\pi$} (3.14,0) node[above]{$\pi$};
\foreach \y in {-1,1}{
\draw (0,\y) node[left,blue]{$\y$} circle (1pt);%Oy
}
\draw [green!50!black, line width = 1.2pt, domain=-5:5, samples=100]%
plot (\x, {\sin(\x*180/pi)}) node[right]{$y=\sin x$};
\draw[draw=none,pattern = north west lines](-1.57,-1)
plot[domain=-1.57:0](\x, {\sin(\x*180/pi)}) (0,0) plot[domain=0:1.57](\x, {\sin(\x*180/pi)})%
(1.57,1)--(1.57,0)--(-1.57,0)--(-1.57,-1);
\draw [dashed,blue] (-1.57,0) node[above]{$-\dfrac{\pi}{2}$}--(-1.57,-1)--(0,-1);
\draw [dashed,blue] (1.57,0) node[below]{$\dfrac{\pi}{2}$}--(1.57,1)--(0,1);
\draw[fill=none,red] (0,0) circle(3pt);
\end{tikzpicture}

```

**2.2 Hàm phân thức**

**Hàm số**  $y = \frac{x - 1}{x + 1}$

Thay đổi dấu trên trục thành gạch.

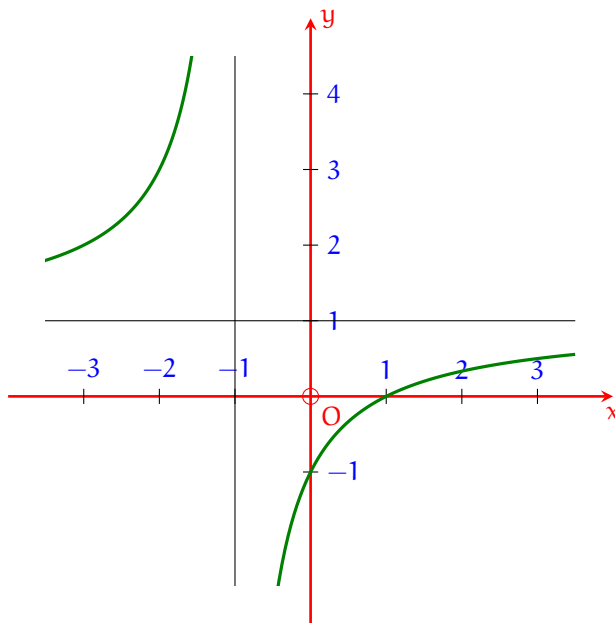


```

\begin{tikzpicture}[>=stealth,x=1cm,y=1cm]
\draw[->,line width = 1pt,red] (-4,0)--(0,0)%
node[below right]{$O$}--(4,0) node[below]{$x$};
\draw[->,line width = 1pt,red] (0,-3) --(0,5) node[right]{$y$};
\foreach \x in {-2,-1,1,2,3}{
\draw (\x,-1)--(\x,.1) node[above,blue]{$\x$};%Oy
}
\foreach \y in {-1,1,2,3,4}{
\draw[-] (-1,\y)--(.1,\y) node[right,blue]{$\y$};%Oy
}
\draw [green!50!black, line width = 1.2pt]%
plot[domain=-4:-1.5, samples=100] (\x, {(\x-1)/(\x+1)});
\draw [green!50!black, line width = 1.2pt]%
plot[domain=-0.5:3.5, samples=100] (\x, {(\x-1)/(\x+1)}) %
node[right]{$y=\dfrac{2x-1}{x+1}$};
\draw [domain=-4:3.5] plot (\x,{1}); %TCD
\draw [-] (-1,-3)--(-1,5); %TCN
\draw[fill=none,red] (0,0) circle(3pt);
\end{tikzpicture}

```

Thêm lệnh `\clip` trước khi vẽ đồ thị sẽ cắt phần đồ thị theo ý muốn.

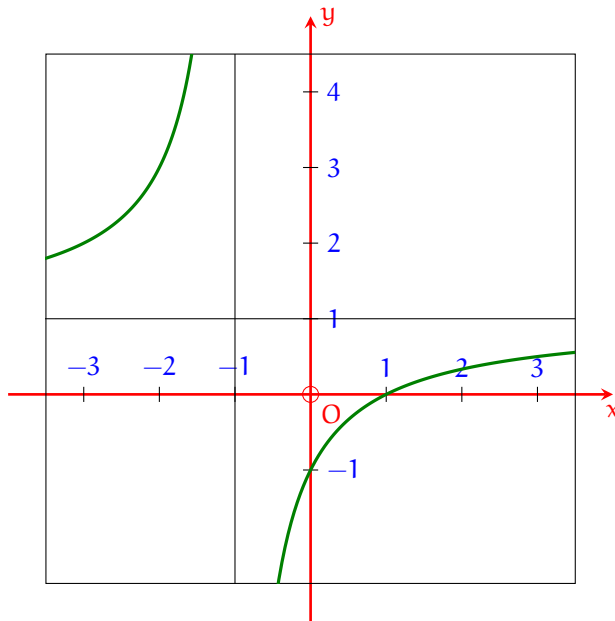


```

\begin{tikzpicture}[>=stealth,x=1cm,y=1cm]
\draw[->,line width = 1pt,red] (-4,0)--(0,0)%
node[below right]{$O$}--(4,0) node[below]{$x$};
\draw[->,line width = 1pt,red] (0,-3) --(0,5) node[right]{$y$};
\foreach \x in {-3,-2,-1,1,2,3}{
\draw (\x,-.1)--(\x,.1) node[above,blue]{$\x$};%Oy
}
\foreach \y in {-1,1,2,3,4}{
\draw[-] (-.1,\y)--(.1,\y) node[right,blue]{$\y$};%Ox
}
\clip (-3.5,-2.5) rectangle (3.5,4.5);
\draw [green!50!black, line width = 1.2pt]%
plot[domain=-4:-1.5, samples=100] (\x, {(\x-1)/(\x+1)});
\draw [green!50!black, line width = 1.2pt]%
plot[domain=-0.5:3.5, samples=100] (\x, {(\x-1)/(\x+1)}) %
node[right]{$y=\dfrac{2x-1}{x+1}$};
\draw [domain=-4:3.5] plot (\x,{1}); %TCD
\draw [-] (-1,-3)--(-1,5); %TCN
\draw[fill=none,red] (0,0) circle(3pt);
\end{tikzpicture}
    
```

Rõ hơn miền `\clip`

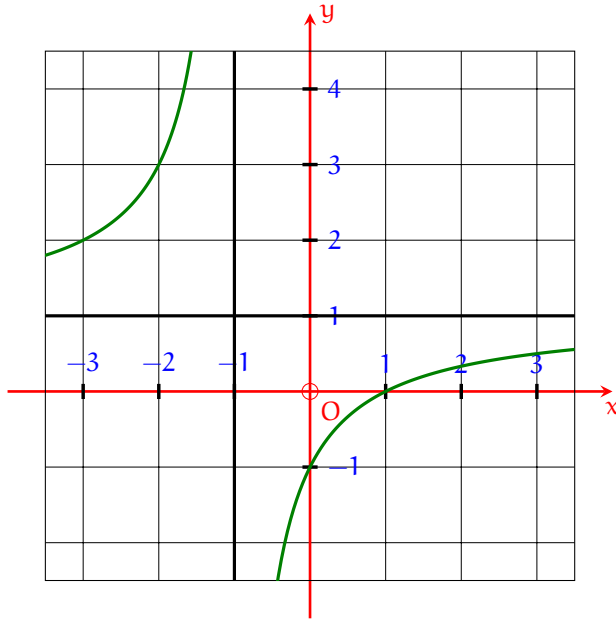




```

\begin{tikzpicture}[>=stealth,x=1cm,y=1cm]
\draw[->,line width = 1pt,red] (-4,0)--(0,0)%
node[below right]{$O$}--(4,0) node[below]{$x$};
\draw[->,line width = 1pt,red] (0,-3) --(0,5) node[right]{$y$};
\foreach \x in {-3,-2,-1,1,2,3}{
\draw[-] (\x,-.1)--(\x,.1) node[above,blue]{$\x$};%Ox
}
\foreach \y in {-1,1,2,3,4}{
\draw[-] (-.1,\y)--(.1,\y) node[right,blue]{$\y$};%Oy
}
\clip[draw] (-3.5,-2.5) rectangle (3.5,4.5);
\draw [green!50!black, line width = 1.2pt]%
plot[domain=-4:-1.5, samples=100] (\x, {(\x-1)/(\x+1)});
\draw [green!50!black, line width = 1.2pt]%
plot[domain=-0.5:3.5, samples=100] (\x, {(\x-1)/(\x+1)}) %
node[right]{$y=\dfrac{2x-1}{x+1}$};
\draw [domain=-4:3.5] plot (\x,{1}); %TCD
\draw [-] (-1,-3)--(-1,5); %TCN
\draw[fill=none,red] (0,0) circle(3pt);
\end{tikzpicture}
    
```

## 2.3 Tạo lưới



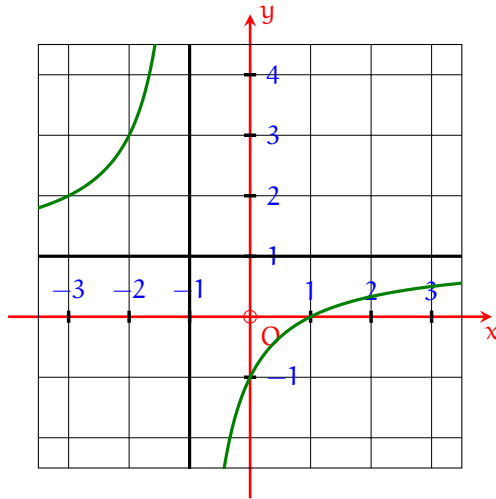
```

\begin{tikzpicture}[>=stealth,x=1cm,y=1cm]
\draw[line width=0.2pt] (-3.5,-2.5) grid (3.5,4.5);
\draw[->,line width = 1pt,red] (-4,0)--(0,0)%
node[below right]{$O$}--(4,0) node[below]{$x$};
\draw[->,line width = 1pt,red] (0,-3) --(0,5) node[right]{$y$};
\foreach \x in {-3,-2,-1,1,2,3}{
\draw[-,line width=1.3pt] (\x,-.1)--(\x,.1) node[above,blue]{$\x$};%Ox
}
\foreach \y in {-1,1,2,3,4}{
\draw[-,line width=1.3pt] (-.1,\y)--(.1,\y) node[right,blue]{$\y$};%Oy
}
\clip[draw] (-3.5,-2.5) rectangle (3.5,4.5);
\draw [green!50!black, line width = 1.2pt]%
plot[domain=-4:-1.5, samples=100] (\x, {(\x-1)/(\x+1)});
\draw [green!50!black, line width = 1.2pt]%
plot[domain=-0.5:3.5, samples=100] (\x, {(\x-1)/(\x+1)}) %
node[right]{$y=\dfrac{2x-1}{x+1}$};
\draw [domain=-4:3.5,line width=1.2pt] plot (\x,{1}); %TCD
\draw [-,line width=1.2pt] (-1,-3)--(-1,5); %TCN
\draw[fill=none,red] (0,0) circle(3pt);
\end{tikzpicture}

```

## 3 PHÔNG TO THU NHỎ BẰNG TỰ CHỌN SCALE

Nhỏ 80%:

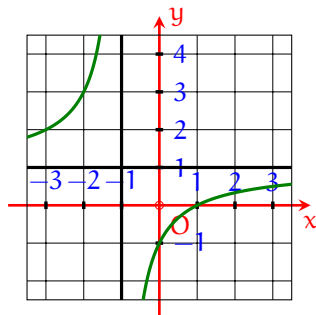


```

\begin{tikzpicture}[>=stealth,x=1cm,y=1cm,scale=0.8]
\draw[line width=0.2pt] (-3.5,-2.5) grid (3.5,4.5);
\draw[->,line width = 1pt,red] (-4,0)--(0,0)%
node[below right]{$O$}--(4,0) node[below]{$x$};
\draw[->,line width = 1pt,red] (0,-3) --(0,5) node[right]{$y$};
\foreach \x in {-3,-2,-1,1,2,3}{
\draw[-,line width=1.3pt] (\x,-.1)--(\x,.1) node[above,blue]{$\x$};%Oy
}
\foreach \y in {-1,1,2,3,4}{
\draw[-,line width=1.3pt] (-.1,\y)--(.1,\y) node[right,blue]{$\y$};%Oy
}
\clip[draw] (-3.5,-2.5) rectangle (3.5,4.5);
\draw [green!50!black, line width = 1.2pt]%
plot[domain=-4:-1.5, samples=100] (\x, {(\x-1)/(\x+1)});
\draw [green!50!black, line width = 1.2pt]%
plot[domain=-0.5:3.5, samples=100] (\x, {(\x-1)/(\x+1)}) node[right]{$y=\dfrac{2x-1}{x+1}$};
\draw [domain=-4:3.5,line width=1.2pt] plot (\x,{1}); %TCD
\draw [-,line width=1.2pt] (-1,-3)--(-1,5); %TCN
\draw[fill=none,red] (0,0) circle(3pt);
\end{tikzpicture}

```

Cho nhỏ tí hơn luôn (50%)



```

\begin{tikzpicture}[>=stealth,x=1cm,y=1cm,scale=0.5]
\draw[line width=0.2pt] (-3.5,-2.5) grid (3.5,4.5);
\draw[->,line width = 1pt,red] (-4,0)--(0,0)%
node[below right]{$O$}--(4,0) node[below]{$x$};
\draw[->,line width = 1pt,red] (0,-3) --(0,5) node[right]{$y$};
\foreach \x in {-3,-2,-1,1,2,3}{
\draw[-,line width=1.3pt] (\x,-1)--(\x,.1) node[above,blue]{$\x$};%Oy
}
\foreach \y in {-1,1,2,3,4}{
\draw[-,line width=1.3pt] (-.1,\y)--(.1,\y) node[right,blue]{$\y$};%Ox
}
\clip[draw] (-3.5,-2.5) rectangle (3.5,4.5);
\draw [green!50!black, line width = 1.2pt]%
plot[domain=-4:-1.5, samples=100] (\x, {(\x-1)/(\x+1)});
\draw [green!50!black, line width = 1.2pt]%
plot[domain=-0.5:3.5, samples=100] (\x, {(\x-1)/(\x+1)}) node[right]{$y=\dfrac{2x-1}{x+1}$};
\draw [domain=-4:3.5,line width=1.2pt] plot (\x,{1}); %TCD
\draw [-,line width=1.2pt] (-1,-3)--(-1,5); %TCN
\draw[fill=none,red] (0,0) circle(3pt);
\end{tikzpicture}

```

## 4 CHỈ DẪN THÊM CÁC THUỘC TÍNH

### 4.1 Tô màu

Ta muốn tô màu cơ bản có thể dùng `\fill[blue]` ●, thay blue bởi red ●, yellow ●, ... ta được màu mong muốn. Nếu muốn nhạt hơn ta dùng `\fill[blue!50!red]` ● hoặc `\fill[blue!50!black]` ●...

### 4.2 Tô sọc

Các tùy chọn tô sọc như trong hình sau:

- horizontal lines: `\tikz \draw[blue, pattern = horizontal lines, pattern color=red!30] (0,0) circle(12pt);`



- vertical lines: `\tikz \draw[blue, pattern = vertical lines, pattern color=green!30] (0,0) circle(12pt);`



- north east lines: `\tikz \draw[blue, pattern = north east lines] (0,0) circle(12pt);`








- north west lines
- grid
- crosshatch
- dots
- crosshatch dots

- fivepointed stars
- sixpointed stars

### 4.3 Tùy chọn vị trí

Gồm có:

- left `\tikz \draw[fill] (0,0)node[left]{$O$} circle(1pt);` 
- right `\tikz \draw[fill] (0,0)node[right]{$X$} circle(1pt);` 
- above `\tikz \draw[fill] (0,0)node[above]{$Y$} circle(1pt);` 
- Xa hơn: `above = 10pt \tikz \draw[fill] (0,0)node[above = 10pt]{$O$} circle(1pt);`  

  -
- below, right below, left above, ...
- anchor = north east `\tikz \draw[fill] (0,0)node[anchor = north east]{$O$} circle(1pt);`  

  -
- ...

## Phần II.

# Vẽ hình học phẳng bằng tkz-euclide

## 5 MỞ ĐẦU

Vì đã nạp gói từ phần 1 rồi nên ta cứ thế mà triển khai.

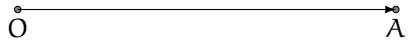
noitemsep Tạo file đơn giản

noiiitemsep Copy code đơn giản

noiiiitemsep Chạy thử nghiệm

File mẫu đơn giản ta copy như sau:

```
\documentclass[12pt,a4paper]{article}
\usepackage[utf8]{vietnam}
\usepackage{tkz-euclide}
\usetkzobj{all}
\usepackage{tikz,tkz-tab,tkz-linknodes}
\usetikzlibrary{calc}
\begin{document}
\begin{tikzpicture}[line join = round]
\tkzDefPoints{0/0/O, 5/0/A}
\tkzDrawPoints(O,A)
\tkzLabelPoints[below](O,A)
\tkzDrawVector(O,A)
\end{tikzpicture}
\end{document}
```



Ồ, cũng không khó lắm. Việc gán nhãn (label) cho 1 điểm có thể làm thủ công, khi đó, ta thích gì gán đó. Bỏ luôn dấu chấm ở lệnh `\tkzDrawPoints`.

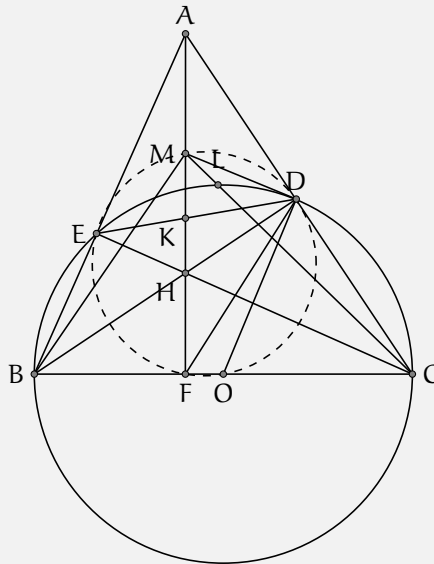


Khoan đã, mục tiêu ở phần này là vẽ hình học phẳng mà. Vậy ta thử vẽ hình theo một bài toán cho trước xem sao nhé. Lớp 9 là hay nhất.

**SGD HCM 2016**

Cho tam giác  $ABC$  ( $AB < AC$ ) có ba góc nhọn. Đường tròn tâm  $O$  đường kính  $BC$  cắt các đoạn  $AC, AB$  lần lượt tại  $D, E$ . Gọi  $H$  là giao điểm của  $BD$  và  $CE$ ,  $F$  là giao điểm của  $AH$  và  $BC$ .

1. Chứng minh:  $AF \perp BC$  và  $\widehat{AFD} = \widehat{ACE}$ .
2. Gọi  $M$  là trung điểm của  $AH$ . Chứng minh  $MD \perp OD$  và 5 điểm  $M, D, O, F, E$  cùng thuộc một đường tròn.
3. Gọi  $K$  là giao điểm của  $AH$  và  $DE$ . Chứng minh  $MD^2 = MK.MF$  và  $K$  là trực tâm của tam giác  $MBC$ .
4. Chứng minh:  $\frac{2}{FK} = \frac{1}{FH} + \frac{1}{FA}$ .



Ồi nhìn hình là thấy nản rồi. Chả nhẽ chuyển sang geogebra cho lành nhỉ? Thôi quyết tâm, ta làm từng bước một, không hiểu đâu ta hỏi google.

## 6 NÂNG CAO

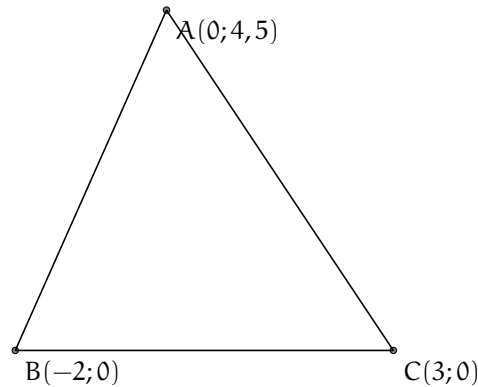
### 6.1 Vẽ hệ điểm cơ bản

Vẽ nháp ở ngoài và ta có được hệ điểm có tam giác  $ABC$  đẹp đẹp dễ nhìn. Có thể chỉnh thêm khi “lên hình”.

```

\begin{tikzpicture}
\tkzInit[ymin=-3,ymax=5,xmin=-6,xmax=5]
\tkzClip
\tkzDefPoints{0/4.5/A,-2/0/B,3/0/C}
\tkzLabelPoint[] (A){$A(0;4,5)$}
\tkzLabelPoint[] (B){$B(-2;0)$}
\tkzLabelPoint[] (C){$C(3;0)$}
\tkzDrawPoints(A,B,C)
\tkzDrawSegments(A,B B,C C,A)
\end{tikzpicture}

```



Tới đây có vẻ nhanh quá. Chậm lại nhé. Lệnh `tkzInit` thì hiển nhiên là khởi tạo rồi. Một miền giới hạn bởi 4 tham số. Lệnh `tkzClip` sẽ cắt theo 4 tham số đó. `tkzDefPoint` là định nghĩa tọa độ điểm (thêm “s” là số nhiều - easy), `tkzLabelPoint` là gán nhãn (đặt tên) đã nói ở trên. `tkzDrawPoint` sẽ “chấm” điểm đen tại điểm tọa độ cho trước. `tkzDrawSegment` thì là vẽ đoạn thẳng chứ gì nữa.

Khoan, có vẻ không đẹp lắm, vì cạnh cắt “nhãn”, không sao, cứ để đó, cuối giờ chỉnh, chứ giờ chỉnh thì biết vẽ sao mà không cắt đây? Tiếp theo, ta tạm quên vụ tọa độ các điểm đi, xóa khỏi nhãn luôn nha.

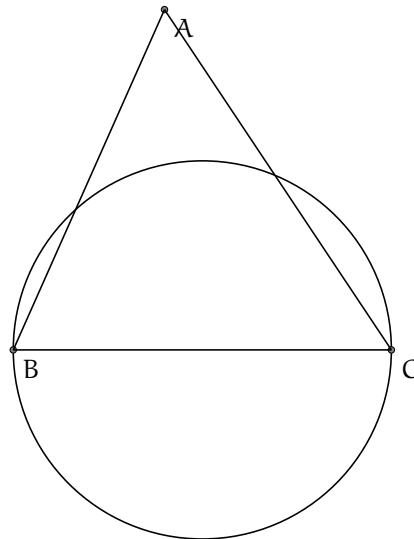
## 6.2 Vẽ đường tròn

Đọc kỹ đề, ta sẽ vẽ đường tròn đường kính BC. Có nhiều cách, tuy nhiên ta chọn cách dễ nhất. Lấy trung điểm O của BC và vẽ đường tròn.

```

\begin{tikzpicture}
\tkzInit[ymin=-3,ymax=5,xmin=-6,xmax=5]
\tkzClip
\tkzDefPoints{0/4.5/A,-2/0/B,3/0/C}
\tkzDefMidPoint(B,C)\tkzGetPoint{O}
\tkzDrawCircle(O,B)
\tkzLabelPoints(A,B,C)
\tkzDrawPoints(A,B,C)
\tkzDrawSegments(A,B B,C C,A)
\end{tikzpicture}

```

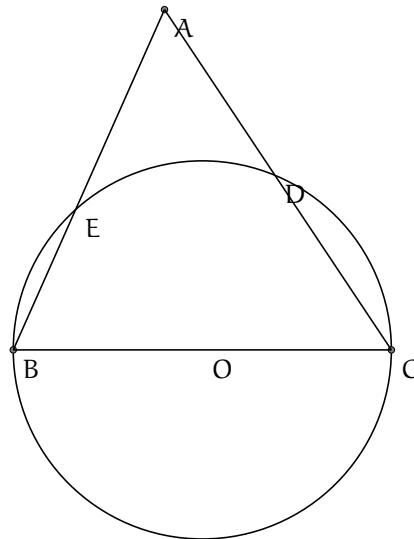


### 6.3 Vẽ giao điểm

Giờ D, E xử sao đây, tất nhiên là giao điểm rồi! `tkzInterLC` tức là “intersection of Line and Circle”, dịch ra là hiểu. Mở rộng `tkzInterLL` tức là “intersection of Line and Line”. Ở vậy sao có lúc `tkzGetPoint`, lại có lúc `tkzGetSecondPoint`, `tkzGetFirstPoint`, rắc rối. Tóm lại dễ hiểu là lúc nào sinh ra 1 điểm thì ta `GetPoint` còn sinh ra 2 điểm thì `Get2Point: First & Second`. Có quy luật `Get`, tuy nhiên, ta `GetFirst` không xong thì ta `GetSecond`, cho nhanh.

```
\begin{tikzpicture}
\tkzInit[ymin=-3,ymax=5,xmin=-6,xmax=5]
\tkzClip
\tkzDefPoints{0/4.5/A,-2/0/B,3/0/C}
\tkzDefMidPoint(B,C)\tkzGetPoint{O}
\tkzDrawCircle(O,B)
\tkzInterLC(A,B)(O,B)\tkzGetSecondPoint{E}
\tkzInterLC(A,C)(O,B)\tkzGetFirstPoint{D}
\tkzLabelPoints(A,B,C,O,D,E)
\tkzDrawPoints(A,B,C)
\tkzDrawSegments(A,B B,C C,A)
\end{tikzpicture}
```



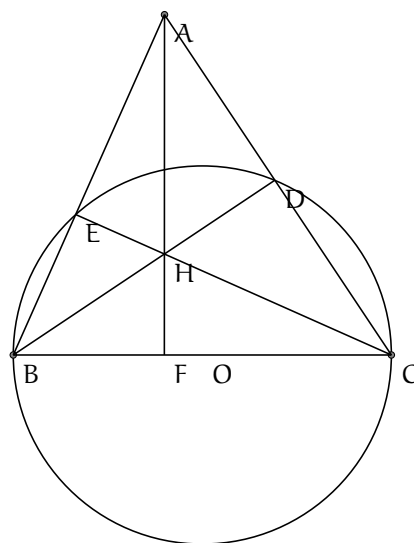


Đã đến lúc dùng tới tkzInterLL rồi kìa,  $BD \cap CE = H, AH \cap BC = F$ . Nói lại luôn nha.

```

\begin{tikzpicture}
\tkzInit[ymin=-3,ymax=5,xmin=-6,xmax=5]
\tkzClip
\tkzDefPoints{0/4.5/A,-2/0/B,3/0/C}
\tkzDefMidPoint(B,C)\tkzGetPoint{O}
\tkzDrawCircle(O,B)
\tkzInterLC(A,B)(O,B)\tkzGetSecondPoint{E}
\tkzInterLC(A,C)(O,B)\tkzGetFirstPoint{D}
\tkzInterLL(B,D)(C,E)\tkzGetPoint{H}
\tkzInterLL(B,C)(A,H)\tkzGetPoint{F}
\tkzLabelPoints(A,B,C,O,D,E,H,F)
\tkzDrawPoints(A,B,C)
\tkzDrawSegments(A,B B,C C,A B,D C,E A,F)
\end{tikzpicture}

```



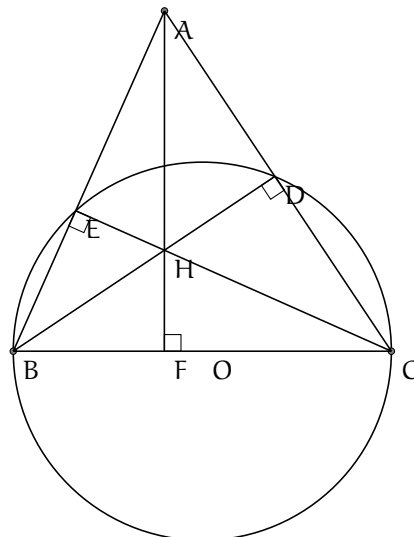
### 6.4 Đánh dấu góc

Ta đánh dấu góc vuông như thế nào nhỉ?

```

\begin{tikzpicture}
\tkzInit[ymin=-3,ymax=5,xmin=-6,xmax=5]
\tkzClip
\tkzDefPoints{0/4.5/A,-2/0/B,3/0/C}
\tkzDefMidPoint(B,C)\tkzGetPoint{O}
\tkzDrawCircle(O,B)
\tkzInterLC(A,B)(O,B)\tkzGetSecondPoint{E}
\tkzInterLC(A,C)(O,B)\tkzGetFirstPoint{D}
\tkzInterLL(B,D)(C,E)\tkzGetPoint{H}
\tkzInterLL(B,C)(A,H)\tkzGetPoint{F}
\tkzLabelPoints(A,B,C,O,D,E,H,F)
\tkzDrawPoints(A,B,C)
\tkzDrawSegments(A,B B,C C,A B,D C,E A,F)
\tkzMarkRightAngles(A,F,C B,D,C B,E,C)
\end{tikzpicture}

```

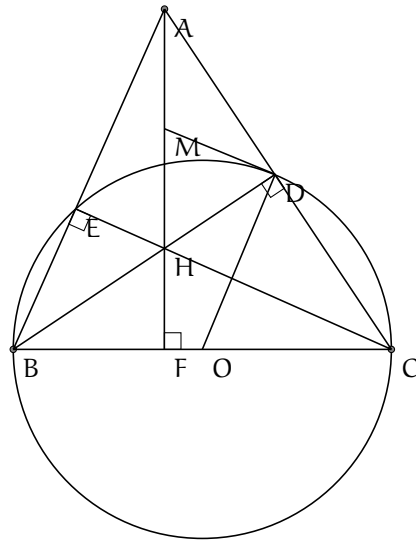


Tiếp tục nào, điểm M xuất hiện chưa? Vậy này giờ ta thấy gì qua code của hình? Đó là có thứ tự xuất hiện theo thứ tự dựng hình. Điểm nào xuất hiện rồi ta được phép dùng nó. Ví dụ giờ là điểm M là trung điểm AH (với điều kiện là điểm A, H phải có rồi). Do đó lệnh tìm trung điểm `tkzDefMidPoint` phải nằm sau H nhé.

```

\begin{tikzpicture}
\tkzInit[ymin=-3,ymax=5,xmin=-6,xmax=5]
\tkzClip
\tkzDefPoints{0/4.5/A,-2/0/B,3/0/C}
\tkzDefMidPoint(B,C)\tkzGetPoint{O}
\tkzDrawCircle(O,B)
\tkzInterLC(A,B)(O,B)\tkzGetSecondPoint{E}
\tkzInterLC(A,C)(O,B)\tkzGetFirstPoint{D}
\tkzInterLL(B,D)(C,E)\tkzGetPoint{H}
\tkzInterLL(B,C)(A,H)\tkzGetPoint{F}
\tkzDefMidPoint(A,H)\tkzGetPoint{M}
\tkzLabelPoints(A,B,C,O,D,E,H,F,M)
\tkzDrawPoints(A,B,C)
\tkzDrawSegments(A,B B,C C,A B,D C,E A,F M,D D,O)
\tkzMarkRightAngles(A,F,C B,D,C B,E,C)
\end{tikzpicture}

```



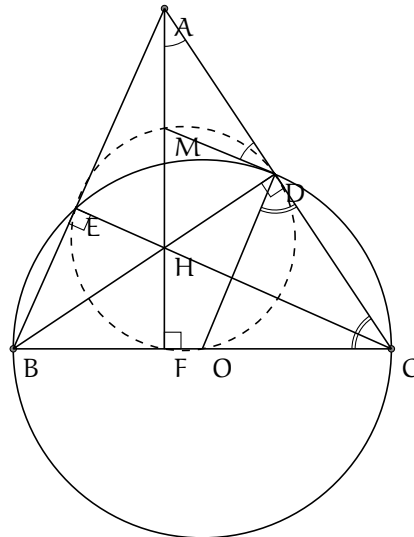
### 6.5 Đường tròn ngoại tiếp

Vấn đề tiếp, làm sao vẽ đường tròn đi qua 5 điểm  $M, D, O, F, E$ ? Tất nhiên là chỉ cần 3 điểm. Còn việc đánh dấu góc không phải vuông?

```

\begin{tikzpicture}
\tkzInit[ymin=-3,ymax=5,xmin=-6,xmax=5]
\tkzClip
\tkzDefPoints{0/4.5/A,-2/0/B,3/0/C}
\tkzDefMidPoint(B,C)\tkzGetPoint{O}
\tkzDrawCircle(O,B)
\tkzInterLC(A,B)(O,B)\tkzGetSecondPoint{E}
\tkzInterLC(A,C)(O,B)\tkzGetFirstPoint{D}
\tkzInterLL(B,D)(C,E)\tkzGetPoint{H}
\tkzInterLL(B,C)(A,H)\tkzGetPoint{F}
\tkzDefMidPoint(A,H)\tkzGetPoint{M}
\tkzDrawCircle[dashed,circum](O,M,E)
\tkzLabelPoints(A,B,C,O,D,E,H,F,M)
\tkzDrawPoints(A,B,C)
\tkzDrawSegments(A,B B,C C,A B,D C,E A,F M,D D,O)
\tkzMarkRightAngles(A,F,C B,D,C B,E,C)
\tkzMarkAngles[size=0.5cm](M,A,D A,D,M)
\tkzMarkAngles[arc=ll,size=0.5 cm,mkcolor=red](O,D,C D,C,O)
\end{tikzpicture}

```



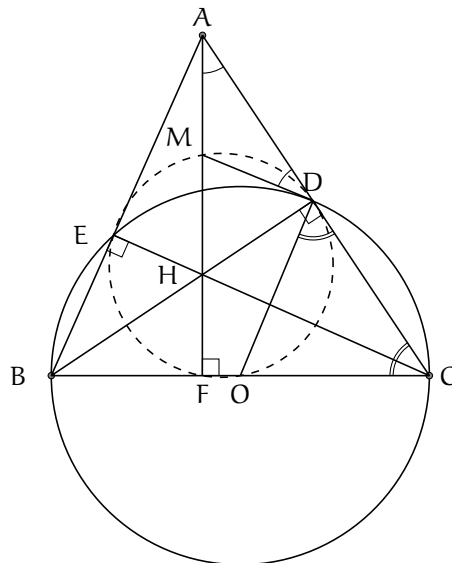
## 6.6 Đặt tên cho đẹp

Cũng gần xong rồi. Ta chăm chút cho tác phẩm nào. Ta đặt tên từng điểm ở vị trí thích hợp cho đẹp.

```

\begin{tikzpicture}
\tkzInit[ymin=-3,ymax=5,xmin=-6,xmax=5]
\tkzClip
\tkzDefPoints{0/4.5/A,-2/0/B,3/0/C}
\tkzDefMidPoint(B,C)\tkzGetPoint{O}
\tkzDrawCircle(O,B)
\tkzInterLC(A,B)(O,B)\tkzGetSecondPoint{E}
\tkzInterLC(A,C)(O,B)\tkzGetFirstPoint{D}
\tkzInterLL(B,D)(C,E)\tkzGetPoint{H}
\tkzInterLL(B,C)(A,H)\tkzGetPoint{F}
\tkzDefMidPoint(A,H)\tkzGetPoint{M}
\tkzDrawCircle[dashed,circum](O,M,E)
\tkzLabelPoints[left=.2cm](B,E,H)
\tkzLabelPoints[above left](M)
\tkzLabelPoints[right](C)
\tkzLabelPoints[below](O,F)
\tkzLabelPoints[above](A,D)
\tkzDrawPoints(A,B,C)
\tkzDrawSegments(A,B B,C C,A B,D C,E A,F M,D D,O)
\tkzMarkRightAngles(A,F,C B,D,C B,E,C)
\tkzMarkAngles[size=0.5cm](M,A,D A,D,M)
\tkzMarkAngles[arc=ll,size=0.5 cm,mkcolor=red](O,D,C D,C,O)
\end{tikzpicture}

```

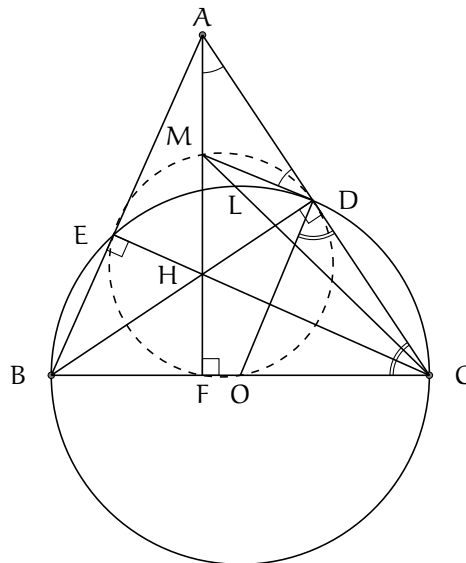


Và kết quả cuối cùng.

```

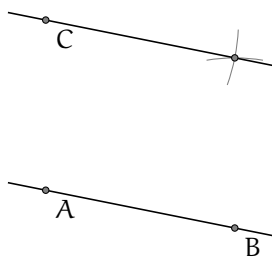
\begin{tikzpicture}
\tkzInit[ymin=-3,ymax=5,xmin=-6,xmax=5]
\tkzClip
\tkzDefPoints{0/4.5/A,-2/0/B,3/0/C}
\tkzDefMidPoint(B,C)\tkzGetPoint{O}
\tkzDrawCircle(O,B)
\tkzInterLC(A,B)(O,B)\tkzGetSecondPoint{E}
\tkzInterLC(A,C)(O,B)\tkzGetFirstPoint{D}
\tkzInterLL(B,D)(C,E)\tkzGetPoint{H}
\tkzInterLL(B,C)(A,H)\tkzGetPoint{F}
\tkzDefMidPoint(A,H)\tkzGetPoint{M}
\tkzDrawCircle[dashed,circum](O,M,E)
\tkzInterLC(M,C)(O,B)\tkzGetFirstPoint{L}
\tkzLabelPoints[left=.2cm](B,E,H)
\tkzLabelPoints[above left](M)
\tkzLabelPoints[right=.2cm](C,D)
\tkzLabelPoints[below](O,F,L)
\tkzLabelPoints[above](A)
\tkzDrawPoints(A,B,C)
\tkzDrawSegments(A,B B,C C,A B,D C,E A,F M,D D,O M,C)
\tkzMarkRightAngles(A,F,C B,D,C B,E,C)
\tkzMarkAngles[size=0.5cm](M,A,D A,D,M)
\tkzMarkAngles[arc=ll,size=0.5 cm,mkcolor=red](O,D,C D,C,O)
\end{tikzpicture}

```



## 7 CÁC LỆNH CƠ SỞ CHO PHÉP CHIẾU VÀ PHÉP BIẾN HÌNH

### 7.1 Phép dựng song song



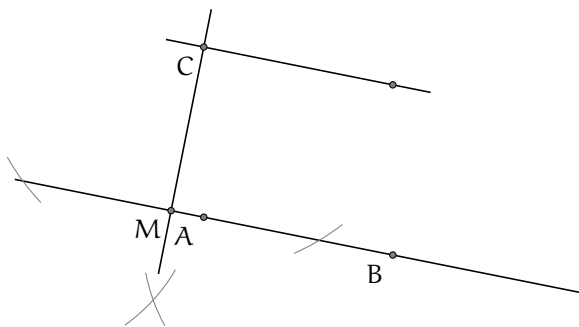
```

\begin{tikzpicture}
\tkzDefPoints{-1.5/-0.25/A,1/-0.75/B,-1.5/2/C}
\tkzDrawLine(A,B)
\tkzDefLine[parallel=through C](A,B) \tkzGetPoint{c}
\tkzShowLine[parallel=through C](A,B)
\tkzDrawLine(C,c)
\tkzDrawPoints(A,B,C,c)
\tkzLabelPoints(A,B,C)
\end{tikzpicture}

```

Chú ý. Lệnh `tkzShowLine` vẽ các bước dựng hình để được đường như mong muốn.

### 7.2 Phép chiếu vuông góc



```

\begin{tikzpicture}
\tkzDefPoints{-1.5/-0.25/A,1/-0.75/B,-1.5/2/C}
\tkzDrawLine[add=1 and 1](A,B)
\tkzDefLine[parallel=through C](A,B) \tkzGetPoint{c}
\tkzDefLine[orthogonal=through C](B,A) \tkzGetPoint{d}
\tkzShowLine[orthogonal=through C](B,A)
\tkzInterLL(C,d)(A,B) \tkzGetPoint{M}
\tkzDrawLines(C,c C,d)
\tkzDrawPoints(A,B,C,c,M)
\tkzLabelPoints[below left](A,B,C,M)
\end{tikzpicture}

```

### 7.3 Phép biến hình

#### 7.3.1 Tịnh tiến

Với lệnh `\tkzDefPointsBy[translation= from A to A'](B,C)` sẽ được  $B', C'$  là ảnh của  $B, C$  qua phép tịnh tiến véc-tơ  $\overrightarrow{AA'}$ .

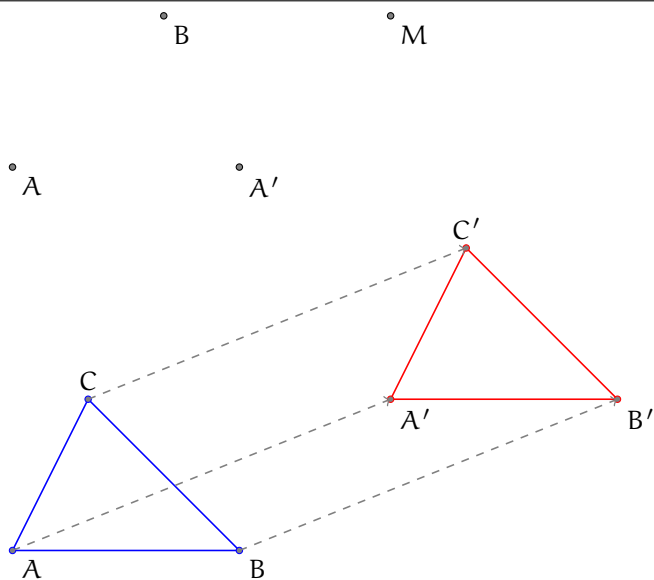
Nếu ta đặt tên điểm mới không phải mặc định thì

```
\tkzDefPointsBy[translation= from A to A'](B)
\tkzGetPoint{b}
\tkzLabelPoint{b}{M}
```

sẽ tịnh tiến điểm  $B$  thành điểm  $b$  có tên là  $M$ .

```
\begin{tikzpicture}
\tkzDefPoints{0/0/A, 3/0/A', 2/2/B}
\tkzDefPointBy[translation= from A to A'](B)
\tkzGetPoint{b}
\tkzDrawPoints(A,A',B,b)
\tkzLabelPoint(b){M}
\tkzLabelPoints(A,A',B)
\end{tikzpicture}

\begin{tikzpicture}
\tkzDefPoint(0,0){A} \tkzDefPoint(5,2){A'}
\tkzDefPoint(3,0){B} \tkzDefPoint(1,2){C}
\tkzDefPointsBy[translation= from A to A'](B,C){}
\tkzDrawPolygon[color=blue](A,B,C)
\tkzDrawPolygon[color=red](A',B',C')
\tkzDrawPoints[color=blue](A,B,C)
\tkzDrawPoints[color=red](A',B',C')
\tkzLabelPoints(A,B,A',B') \tkzLabelPoints[above](C,C')
\tkzDrawSegments[color = gray,->,style=dashed](A,A' B,B' C,C')
\end{tikzpicture}
```



#### 7.3.2 Quay

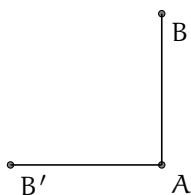
Cú pháp



`\tkzDefPointBy[rotation= center A angle a](B)`

nghĩa là quay tâm A góc  $\alpha$  của điểm B.

```
\begin{tikzpicture}
\tkzDefPoints{0/0/A, 0/2/B}
\tkzDefPointBy[rotation= center A angle 90](B)
\tkzGetPoint{b}
\tkzDrawPoints(A,B,b)
\tkzDrawSegments(A,B A,b)
\tkzLabelPoint(b){$B'$}
\tkzLabelPoints(A,B)
\end{tikzpicture}
```



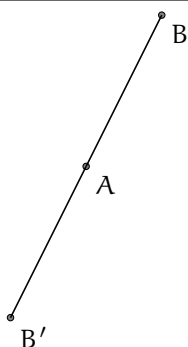
### 7.3.3 Đối xứng tâm

Cú pháp

`\tkzDefPointBy[symmetry=center A](B)`

nghĩa là đối xứng tâm A của điểm B.

```
\begin{tikzpicture}
\tkzDefPoints{0/0/A, 1/2/B}
\tkzDefPointBy[symmetry=center A](B)
\tkzGetPoint{b}
\tkzDrawPoints(A,B,b)
\tkzDrawSegments(A,B A,b)
\tkzLabelPoint(b){$B'$}
\tkzLabelPoints(A,B)
\end{tikzpicture}
```



### 7.3.4 Đối xứng trục

Cú pháp

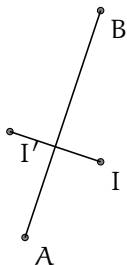
`[reflection=over A--B](I)`

nghĩa là đối xứng qua AB của điểm I.

```

\begin{tikzpicture}
\tkzDefPoints{0/0/A, 1/3/B, 1/1/I}
\tkzDefPointBy[reflection=over A--B](I)\tkzGetPoint{I'}%Tự get I'
\tkzDrawPoints(A,B,I,I')
\tkzDrawSegments(A,B I,I')
\tkzLabelPoints(A,B,I,I')
\end{tikzpicture}

```



### 7.3.5 Vị tự

Cú pháp

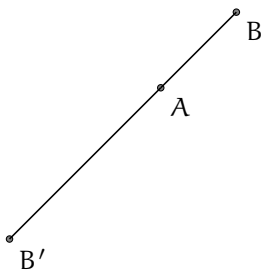
`[homothety=center A ratio k](B)`

nghĩa vị tự tâm A, tỉ số k của điểm B.

```

\begin{tikzpicture}
\tkzDefPoints{0/0/A, 1/1/B}
\tkzDefPointBy[homothety=center A ratio -2](B)\tkzGetPoint{B'}
\tkzDrawPoints(A,B,B')
\tkzDrawSegments(A,B A,B')
\tkzLabelPoints(A,B,B')
\end{tikzpicture}

```



### 7.3.6 Tổng hợp

#### TỔNG KẾT PHÉP BIẾN HÌNH

1. Tịnh tiến  $\backslash\text{tkzDefPointBy}[\text{translation}=\text{from A to B}](E)$
2. Vị tự  $\backslash\text{tkzDefPointBy}[\text{homothety}=\text{center A ratio .5}](E)$
3. Đối xứng trục  $\backslash\text{tkzDefPointBy}[\text{reflection}=\text{over A--B}](E)$
4. Đối xứng tâm  $\backslash\text{tkzDefPointBy}[\text{symmetry}=\text{center A}](E)$
5. Chiếu vuông góc  $\backslash\text{tkzDefPointBy}[\text{projection}=\text{onto A--B}](E)$
6. Quay  $\backslash\text{tkzDefPointBy}[\text{rotation}=\text{center O angle 30}](E)$
7. Nghịch đảo  $\backslash\text{tkzDefPointBy}[\text{inversion}=\text{center O through A}](E)$

Chú ý: Có thể thực hiện cùng lúc nhiều điểm bằng lệnh  $\backslash\text{tkzDefPointsBy}[\text{tên phép biến hình}]$ .

## 8 CÁC ĐIỂM ĐẶC BIỆT VÀ ĐƯỜNG ĐẶC BIỆT TRONG TAM GIÁC

### 8.1 Trung điểm

Cú pháp  $\backslash\text{tkzDefMidPoint}(A,B)\backslash\text{tkzGetPoint}\{I\}$

### 8.2 Trọng tâm

Cú pháp  $\backslash\text{tkzCentroid}(A,B,C)\backslash\text{tkzGetPoint}\{G\}$

### 8.3 Tâm đường tròn ngoại tiếp

Cú pháp  $\backslash\text{tkzCircumCenter}(A,B,C)\backslash\text{tkzGetPoint}\{I\}$

### 8.4 Tâm đường tròn nội tiếp

Cú pháp  $\backslash\text{tkzInCenter}(A,B,C)\backslash\text{tkzGetPoint}\{J\}$

### 8.5 Trục tâm

Cú pháp  $\backslash\text{tkzOrthoCenter}(A,B,C)\backslash\text{tkzGetPoint}\{H\}$  Hoặc có thể ta dựng hai đường cao AD, BE và dùng  $\backslash\text{tkzInterLL}(A,D)(B,E)$  xem mục dưới.

### 8.6 Đường cao

Cú pháp trục tâm và đường cao gồm 3 lệnh  
 $\backslash\text{tkzDefPointBy}[\text{projection}=\text{onto B--C}](A)\backslash\text{tkzGetPoint}\{D\}$  %Dựng đường cao AD.;  
 $\backslash\text{tkzDefPointBy}[\text{projection}=\text{onto A--C}](B)\backslash\text{tkzGetPoint}\{E\}$  %Dựng đường cao BE.;  
 $\backslash\text{tkzInterLL}(A,D)(B,E)\backslash\text{tkzGetPoint}\{H\}$  %Dựng trục tâm H.;

### 8.7 Đường trung tuyến

Chỉ cần tìm trung điểm cạnh đối diện và nối lại.

### 8.8 Đường phân giác

Cú pháp `\tkzDefLine[bisector](B,A,C) \tkzGetPoint{d}` %Lấy điểm d trên phân giác trong góc A và `\tkzInterLL(A,d)(B,C) \tkzGetPoint{D}` %Chân đường cao D. Nếu muốn dựng phân giác ngoài thì `\tkzDefLine[bisector out](B,A,C) \tkzGetPoint{d}`.

### 8.9 Đường trung trực

Chỉ cần tìm trung điểm AB và dựng đường vuông góc với AB. Cú pháp `\tkzDefMidPoint(B,A) \tkzGetPoint{I}` và `\tkzDefLine[perpendicular=through I](B,A) \tkzGetPoint{K}`.

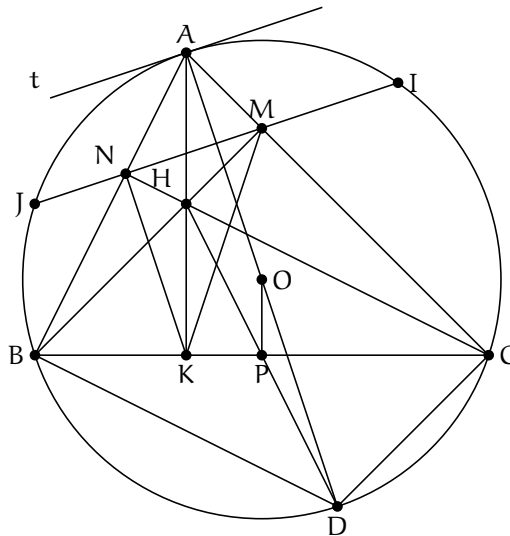
## 9 THỰC HÀNH

Vẽ theo bài tập sau đây và vẽ xong so với kết quả code phía dưới.

Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định vòng 2 2016

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AK, BM, CN của tam giác ABC cắt nhau tại H.

- Chứng minh:  $\widehat{NKH} = \widehat{MKH}$ .
- Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại hai điểm I, J. Chứng minh AO đi qua trung điểm của IJ.
- Gọi P là trung điểm BC, diện tích tứ giác AMHN là S. Chứng minh  $2OP^2 > S$ .



```

\begin{tikzpicture}[thick]
\tkzDefPoints{0/2/A,-2/-2/B,4/-2/C}
%\tkzCentroid(A,B,C)\tkzGetPoint{G}
\tkzCircumCenter(A,B,C)\tkzGetPoint{O}
\tkzOrthoCenter(A,B,C)\tkzGetPoint{H}
\tkzInterLL(A,B)(C,H)\tkzGetPoint{X}
\tkzInterLL(C,A)(B,H)\tkzGetPoint{Y}
\tkzInterLL(B,C)(A,H)\tkzGetPoint{Z}
\tkzInterLC(Y,X)(O,A)\tkzGetPoints{J}{I}
\tkzDefPointBy[translation = from X to Y](A)\tkzGetPoint{U}
\tkzDefPointBy[symmetry= center A](U)\tkzGetPoint{V}
\tkzDefPointBy[symmetry= center O](A)\tkzGetPoint{D}
\tkzDefMidPoint(B,C)\tkzGetPoint{P}
\tkzDrawSegments(A,B B,C C,A D,B D,A D,C C,X B,Y A,Z D,H P,O I,J Z,Y X,Z U,V)
\tkzDrawCircle(O,A)
\tkzDrawPoints[color = black,fill = black,size=4](A,B,C,D,P,H,O,X,Y,Z,I,J)
\tkzLabelPoints[above](A)\tkzLabelPoints[left](B,J)
\tkzLabelPoints[right](C,I,O)\tkzLabelPoints[below](D,P)
\tkzLabelPoint[below](Z){$K$}\tkzLabelPoint[above](Y){$M$}
\tkzLabelPoint[above left](X){$N$}
\tkzLabelPoint[above left](V){$t$}
%\tkzLabelPoints[shift={(-0.15,0.6)}](G,O)
\tkzLabelPoints[shift={(-0.6,0.6)}](H)
\end{tikzpicture}

```

## Phần III.

# Vẽ hình học không gian bằng tkz-euclide & TikZ

Gói tkz-euclide có lợi thế khi vẽ hình học không gian các khối đa diện còn gói TikZ thì vẽ các khối tròn xoay tốt hơn. Nói chung, nếu ta quen thì nên kết hợp cả 2 vì bản chất đều là một cả. File mẫu đơn giản ta copy như sau:

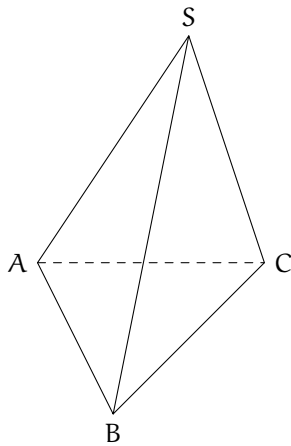
```

\documentclass[12pt,a4paper]{article}
\usepackage[utf8]{vietnam}
\usepackage{tkz-euclide}
\usetkzobj{all}
\usepackage{tikz,tkz-tab,tkz-linknodes}
\usetikzlibrary{calc,angles,quotes,patterns}
\begin{document}
\begin{tikzpicture}[line join = round, line cap = round]
...
\end{tikzpicture}
\end{document}

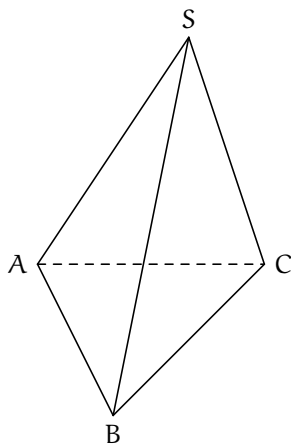
```

## 10 MỞ ĐẦU

Ta thử vẽ một khối đa diện đơn giản nào. Tứ diện nhé! Cứ lấy điểm cố định rồi nối lại thôi mà. Ta so sánh code TikZ & tkz-euclide.



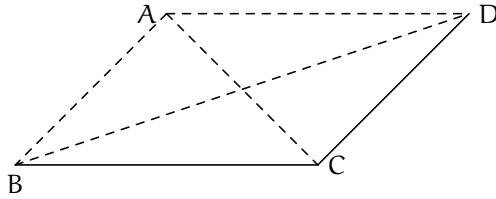
```
\begin{tikzpicture}[>=stealth, line join=round, line cap = round]
\coordinate (A) at (0,0);
\coordinate (C) at (3,0);
\coordinate (B) at (1,-2);
\coordinate (S) at (2,3);
\draw (A) node[left]{$A$}--(B)node[below]{$B$}--(C)node[right]{$C$}%
--(S)node[above]{$S$}--(B);
\draw (A)--(S);
\draw[dashed] (A)--(C);
\end{tikzpicture}
```



```
\begin{tikzpicture}[>=stealth, line join=round, line cap = round]
\tkzDefPoints{0/0/A, 3/0/C, 1/-2/B, 2/3/S}
\tkzDrawSegments(A,B B,C C,S S,B A,S)
\tkzDrawSegment[dashed](A,C)
%\tkzLabelPoints(A,B,C,S)
\tkzLabelPoints[left](A)
\tkzLabelPoints[below](B)
\tkzLabelPoints[right](C)
\tkzLabelPoints[above](S)
\end{tikzpicture}
```

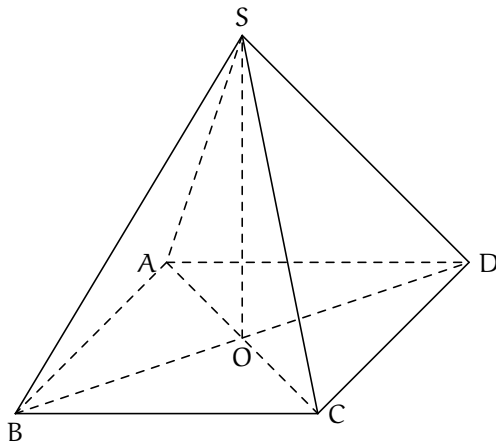
Cũng không khác nhau gì mấy. Gói tkz-euclide khá mạnh ở mảng phép biến hình. Do đó mình dùng nó để vẽ hình học không gian khá nhẹ nhàng. Ta đến ví dụ khó hơn: “Hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là vuông tâm  $O$ ,  $SO \perp (ABCD)$ . Góc giữa  $SB$  và đáy bằng  $\alpha^\circ$  và góc giữa mặt phẳng  $(SCD)$  và đáy bằng  $\beta^\circ$ .”

Bước 1. Dựng đáy hình bình hành bằng cách lấy 3 điểm cố định và tịnh tiến để ra điểm còn lại:



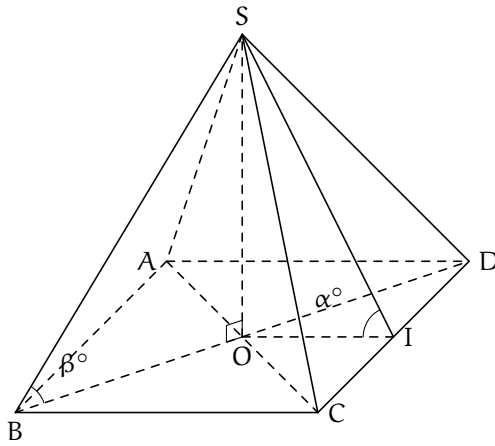
```
\begin{tikzpicture}[>=stealth, line join=round, line cap = round]
\tkzDefPoints{0/0/A, 4/0/D, -2/-2/B}
\tkzDefPointBy[translation=from A to D](B)\tkzGetPoint{C}
\tkzDrawSegments(B,C C,D)
\tkzDrawSegments[dashed](A,B A,C B,D A,D)
\tkzLabelPoints[left](A)
\tkzLabelPoints[below](B)
\tkzLabelPoints[right](C,D)
\end{tikzpicture}
```

Bước 2: Dựng tâm  $O$  và đường vuông góc  $SO$ , lấy điểm  $S$ .



```
\begin{tikzpicture}[>=stealth, line join=round, line cap = round]
\tkzDefPoints{0/0/A, 4/0/D, -2/-2/B}
\tkzDefPointBy[translation=from A to D](B)\tkzGetPoint{C}
\tkzInterLL(A,C)(B,D)\tkzGetPoint{O}
\tkzDefLine[perpendicular=through O](A,D)\tkzGetPoint{S}
\tkzDrawSegments(B,C C,D S,B S,C S,D)
\tkzDrawSegments[dashed](A,B S,A A,C B,D A,D O,S)
\tkzLabelPoints[left](A)
\tkzLabelPoints[below](B,O)
\tkzLabelPoints[right](C,D)
\tkzLabelPoints[above](S)
\end{tikzpicture}
```

Bước 3: Dựng góc cạnh bên và đáy, góc mặt bên và đáy.

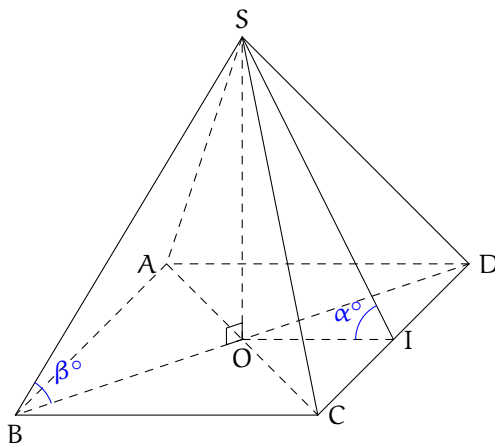


```

\begin{tikzpicture}[>=stealth, line join=round, line cap = round]
\tkzDefPoints{0/0/A, 4/0/D, -2/-2/B}
\tkzDefPointBy[translation=from A to D](B)\tkzGetPoint{C}
\tkzInterLL(A,C)(B,D)\tkzGetPoint{O}
\tkzDefLine[perpendicular=through O](A,D)\tkzGetPoint{S}
\tkzDefMidPoint(C,D)\tkzGetPoint{I}
\tkzDrawSegments(B,C C,D S,I S,B S,C S,D)
\tkzDrawSegments[dashed](A,B S,A A,C B,D A,D O,S O,I)
\tkzLabelPoints[left](A)
\tkzLabelPoints[below](B,O)
\tkzLabelPoints[right](C,I,D)
\tkzLabelPoints[above](S)
\tkzMarkAngles[size=0.4cm, label=$\alpha^\circ$](S,I,O)
\tkzMarkAngles[size=0.4cm, label=$\beta^\circ$](O,B,S)
\tkzMarkRightAngle(S,O,B)
\end{tikzpicture}

```

Giờ ta thử vẽ hình vừa rồi với gói TikZ. Chỗ này cần nạp thư viện `\usetikzlibrary{calc,angles,quotes}`





```

\begin{tikzpicture}[>=stealth, line join=round, line cap = round]
\coordinate (A) at (0,0);
\coordinate (D) at (4,0);
\coordinate (B) at (-2,-2);
\coordinate (C) at ($(D)-(A)+(B)$);
\coordinate (O) at ($(A)!0.5!(C)$);
\coordinate (S) at ($(O)+(0,4)$);
\coordinate (I) at ($(D)!0.5!(C)$);
\draw[dashed] (A) node[left]{$A$}--(B)node[below]{$B$}--(D);
\draw (B)--(C)node[right]{$C$}--(D)node[right]{$D$};
\draw[dashed](D)--(A)--(C);
\draw[dashed](O)node[below]{$O$}--(S)node[above]{$S$}--(A);
\draw(S)--(B);\draw(S)--(C);\draw(S)--(D);
\draw(S)--(I);\draw[dashed](O)--(I)node[right]{$I$};
\path (S) -- (I) -- (O) pic["$ \alpha^\circ$ ", draw, blue, angle radius = 0.5cm, angle eccentricity = 1.4] %
{angle = S-I-O};
\path (O) -- (B) -- (S) pic["$ \beta^\circ$ ", draw, blue, angle radius = 0.5cm, angle eccentricity = 1.8] %
{angle = O-B-S};
\tkzMarkRightAngle(S,O,B)
\end{tikzpicture}

```

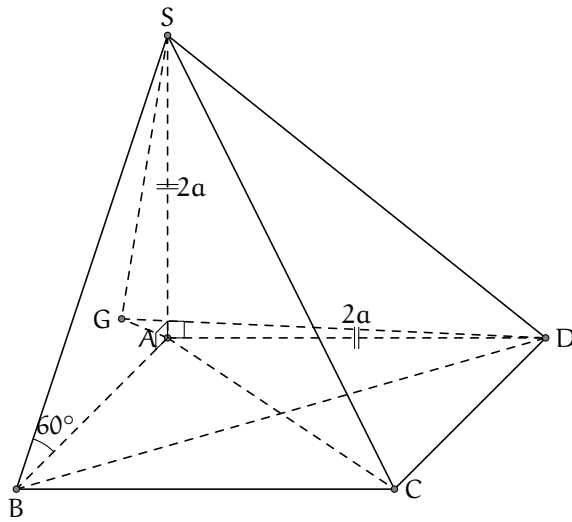
Ở đây, việc vẽ góc vuông  $\widehat{SOB}$  bằng TikZ khá phức tạp, ngay cả vẽ góc thường cũng vậy, nên ta dùng gói tkz-euclide cho nhanh và thấy code gọn hơn hẳn: `\tkzMarkRightAngle(S,O,B)`.

Sau đây ta kết hợp cả gói TikZ và gói tkz-euclide để vẽ một hình không gian trong một bài toán cụ thể. Việc nghiên cứu đặc trưng của từng gói sẽ dành cho độc giả trong các tài liệu tham khảo.

## 11 HÌNH CHÓP, HÌNH LĂNG TRỤ

Thi thử Lương Thế Vinh Hà Nội

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $SA \perp (ABCD)$ ,  $ABCD$  là hình chữ nhật,  $SA = AD = 2a$ . Góc giữa  $(SBC)$  và đáy bằng  $60^\circ$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $SBC$ . Tính thể tích khối chóp  $S.AGD$ .



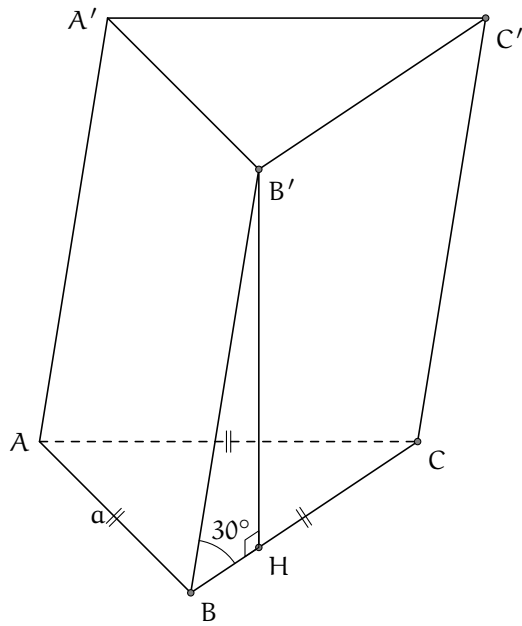
```

\begin{tikzpicture}[>=stealth, line join=round, line cap = round]
\tkzDefPoints{0/0/A, 5/0/D, -2/-2/B, 0/4/S}
\tkzDefPointBy[translation=from A to D](B)\tkzGetPoint{C}
\tkzInCenter(S,A,B)\tkzGetPoint{G}
\tkzDrawSegments(B,C C,D S,B S,C S,D)
\tkzDrawSegments[dashed](A,B S,A A,C B,D A,D A,G G,D S,G)
\tkzLabelPoints[left](A,G)
\tkzLabelPoints[below](B)
\tkzLabelPoints[right](C,D)
\tkzLabelPoints[above](S)
\tkzDrawPoints(S,A,B,C,D,G)
\tkzMarkRightAngles(S,A,B S,A,D)
\tkzMarkAngles[label=$60^\circ$,size=.7cm](A,B,S)
\tkzMarkSegments[mark=||](S,A A,D)
\tkzLabelSegment[right](S,A){$2a$}
\tkzLabelSegment[above=2pt](A,D){$2a$}
\end{tikzpicture}

```

Thi thử Lương Thế Vinh Hà Nội

Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a$ . Độ dài cạnh bên bằng  $4a$ . Mặt phẳng  $(BCC'B')$  vuông góc với đáy và  $\widehat{B'BC} = 30^\circ$ . Tính thể tích khối chóp  $A.CC'B'$ .



```

\begin{tikzpicture}[>=stealth, line join=round, line cap = round]
\tkzDefPoints{0/0/A, 5/0/C, 2/-2/B}
\tkzDefPointWith[linear,K=0.7](C,B)\tkzGetPoint{H}%lấy điểm H sao cho CH=0.7CB
\coordinate (B') at ($(H)+(0,5)$);
%Dùng phép toán tọa độ cho gói tikz dễ hơn tkz-euclide
\tkzDefPointsBy[translation=from B to B'](A,C){A'}{C'}
%tính tiến và tạo tự động các điểm A',C'
%\tkzInCenter(S,A,B)\tkzGetPoint{G}
\tkzDrawSegments(A,B B,C B',A A',C' B',H A',B' B',C' C',A')
\tkzDrawSegments[dashed](A,C)
\tkzLabelPoints[left](A',A)
\tkzDrawPoints(B,C,H,B',C')\tkzLabelPoints(B,C,H,B',C')
\tkzMarkRightAngles(B',H,B)
\tkzMarkAngles[label=$30^\circ$,size=.7cm](C,B,B')
\tkzMarkSegments[mark=||](B,A A,C C,B)
\tkzLabelSegment[left](A,B){a}
\end{tikzpicture}

```

## 12 HÌNH NÓN, HÌNH TRỤ

Ta bắt đầu vẽ hình nón. Lệnh vẽ elip hoàn chỉnh sẽ là `\draw (I) ellipse (x cm and y cm);`, với  $x$  cm,  $y$  cm là hai bán kính trục (lớn và bé). Điểm I tâm của elip.

Lệnh vẽ một phần elip là `\draw (I) arc (alpha: beta: x cm and y cm);` trong đó  $\alpha \rightarrow \beta$  là phần elip tính theo góc. Điểm I là vị trí bắt đầu vẽ của elip.

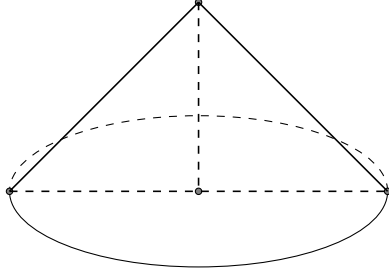


```

\begin{tikzpicture}[scale=.5]
\draw (0,0) node[right] {$I$};
\draw[dashed] (0,0) arc (0:180:5 cm and 2cm);
\draw (0,0) arc (0:-180:5 cm and 2cm);
\end{tikzpicture}

```

Vậy để vẽ nón, ta chỉ cần định nghĩa thêm điểm  $A, B$  và  $S$

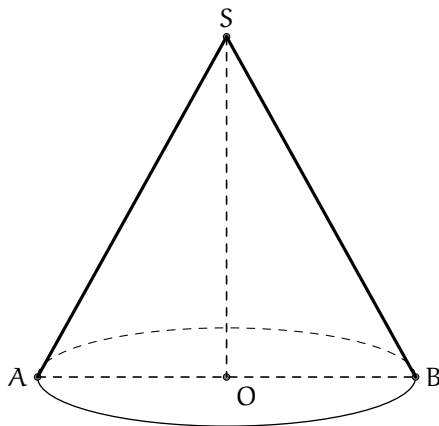


```

\begin{tikzpicture}[scale=.5,x=1cm,y=1cm]
\coordinate (B) at (0,0);
\coordinate (A) at (-10,0);
\coordinate (O) at ($(A)!0.5!(B)$);
\coordinate (S) at ($(O)+(0,5)$);
\draw[dashed] (B) arc (0:180:5 cm and 2cm);
\draw (B) arc (0:-180:5 cm and 2cm);
\tkzDrawPoints(A,B,O,S)
\tkzDrawSegments(S,A S,B)
\tkzDrawSegments[dashed](S,O A,B)
\end{tikzpicture}

```

Tới đây, điểm  $S$  quá thấp và bán kính bé của elip nhỏ nên tạo elip chưa đẹp, ta chỉnh code chút.

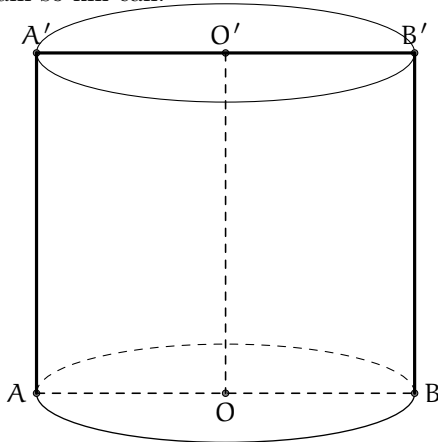


```

\begin{tikzpicture}[scale=.5,x=1cm,y=1cm,line join = round, line cap = round]
\coordinate (B) at (0,0);
\coordinate (A) at (-10,0);
\coordinate (O) at ($(A)!0.5!(B)$);
\coordinate (S) at ($(O)+(0,9)$);
\draw[dashed] (B) arc (0:180:5 cm and 1.3cm);
\draw[line width=0.5pt] (B) arc (0:-180:5 cm and 1.3cm);
\tkzDrawPoints(A,B,O,S)
\tkzLabelPoints[right](B)\tkzLabelPoints(O)
\tkzLabelPoints[above](S)\tkzLabelPoints[left](A)
\tkzDrawSegments[very thick](S,A S,B)
\tkzDrawSegments[dashed](S,O A,B)
\end{tikzpicture}

```

Việc vẽ hình trụ cũng tương tự như nón. Nhưng mọi chuyện sẽ đơn giản hơn vì không có nét “đè” như nón. Ta tập cách định nghĩa thêm biến để có thể thay đổi các tham số khi cần.



```

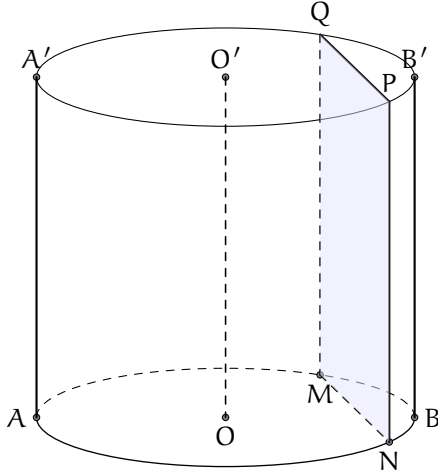
\begin{tikzpicture}[scale=.5,x=1cm,y=1cm,line join = round, line cap = round]
\def\x{5} %bán trục lớn
\def\y{1.3} %bán trục bé
\def\h{9} %chiều cao trụ
\coordinate (B) at (0,0);
\coordinate (A) at (-2*\x,0);
\coordinate (O) at ($(A)!0.5!(B)$);
\coordinate (O') at ($(O)+(0,\h)$);
\coordinate (A') at ($(A)+(0,\h)$);
\coordinate (B') at ($(B)+(0,\h)$);
\draw[dashed] (B) arc (0:180:\x cm and \y cm);
\draw[line width=0.5pt] (B) arc (0:-180:\x cm and \y cm);
\draw (O') ellipse (\x cm and \y cm);
\tkzDrawPoints(A,B,O,O',A',B')
\tkzLabelPoints[right](B)\tkzLabelPoints[below](O)
\tkzLabelPoints[above](O',A',B')\tkzLabelPoints[left](A)
\tkzDrawSegments[very thick](A',A B',B A',B')
\tkzDrawSegments[dashed](O',O A,B)
\end{tikzpicture}

```

Ta thử một bài tập minh họa.

Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 5 có trục là  $OO'$ . Một mặt phẳng song song với trục cắt trụ theo một hình chữ nhật  $MNPQ$ , khoảng cách từ trục đến mặt phẳng ( $MNPQ$ ) bằng 3 cm. Tính diện tích hình chữ nhật  $MNPQ$ .

Để vẽ được hình chữ nhật  $ABCD$  ta cần tìm cách lấy điểm trên elip. Ta dùng cú pháp  $\text{\coordinate (M) at } (\text{\$I}+(\text{\x sin (t)},\text{\y cos (t)}))\text{\$}$ , với  $t$  là góc quay từ tâm  $I \equiv O$  với hệ trục tọa độ  $Oxy$ .



```

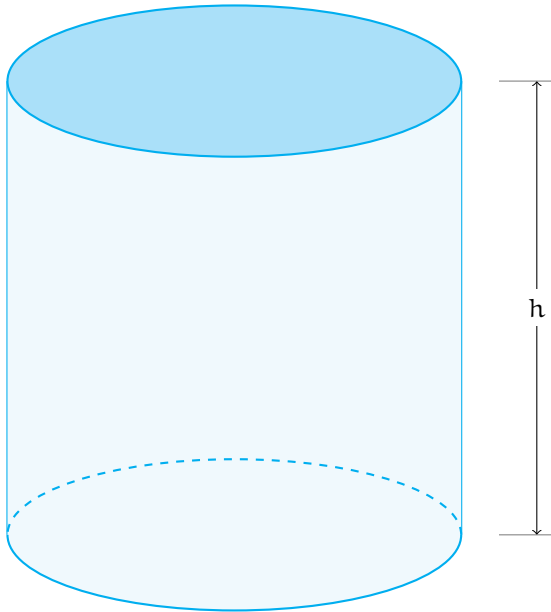
\begin{tikzpicture}[scale=.5,x=1cm,y=1cm,line join = round, line cap = round]
\def\x{5} %bán trục lớn
\def\y{1.3} %bán trục bé
\def\h{9} %chiều cao trụ

\coordinate (B) at (0,0);
\coordinate (A) at (-2*\x,0);
\coordinate (O) at ($(A)!0.5!(B)$);
\coordinate (O') at ($(O)+(0,\h)$);
\coordinate (A') at ($(A)+(0,\h)$);
\coordinate (B') at ($(B)+(0,\h)$);
\coordinate (M) at ($(O)+(\x*\cos(60),\y*\sin(60))$);
\coordinate (N) at ($(O)+(\x*\cos(-30),\y*\sin(-30))$);
\coordinate (P) at ($(N)+(0,\h)$);
\coordinate (Q) at ($(M)+(0,\h)$);
\draw[dashed] (B) arc (0:180:\x cm and \y cm);
\draw[line width=0.5pt] (B) arc (0:-180:\x cm and \y cm);
\draw (O') ellipse (\x cm and \y cm);
\tkzDrawPoints(A,B,O,O',A',B',M,N)
\tkzLabelPoints[right](B)\tkzLabelPoints[below](O,M,N)
\tkzLabelPoints[above](O',A',B',P,Q)\tkzLabelPoints[left](A)
\tkzDrawSegments[thick](A',A B',B N,P P,Q)
\tkzDrawSegments[dashed](O',O M,N Q,M)
\tkzDrawPolygon[fill=blue!10,opacity=.5,draw=none](M,N,P,Q)
\end{tikzpicture}

```

## 13 MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA

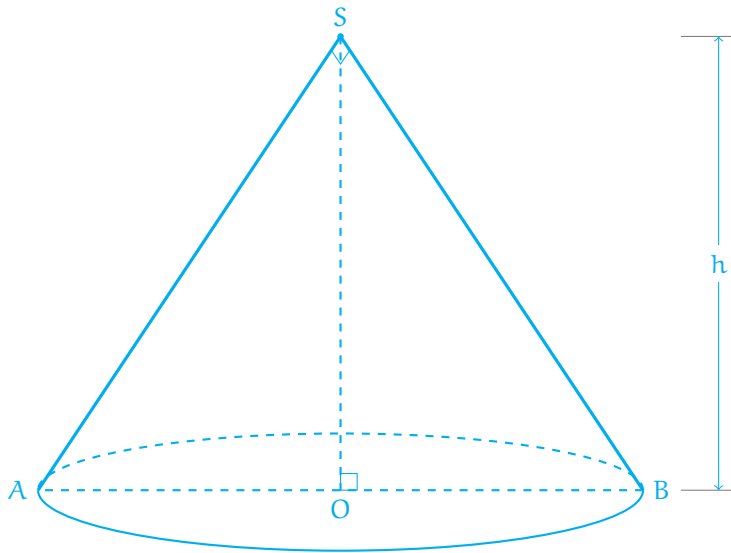
### 13.1 Nón trụ cầu



```

\begin{tikzpicture}
\def\a{3} % bán trục lớn = bán kính trụ
\def\b{1} % bán trục nhỏ
\def\h{6} % chiều cao trụ
% các chú thích
\draw (0,\h)--(\a,\h) node[midway, above]{$r$};
\filldraw (0,\h) circle(1pt);
\draw[<->, xshift=1cm] (\a,0)--(\a,\h) node[midway, fill=white] {$h$};
\draw[gray] (\a,0) ++(0.5cm,0)--+(0.75cm,0)
(\a,\h) ++(0.5cm,0)--+(0.75cm,0);
% vẽ các cạnh bên
\draw[cyan, thick] (\a,0)--(\a,\h) (-\a,0)--(-\a,\h);
\fill[cyan!5] (-\a,0)--(-\a,\h) arc [x radius=\a, y radius=\b, start angle=-180, end angle=0] (\a,\h)--(\a,0) arc [x radius=\a, y radius=\b, start angle=0, end angle=180];
% vẽ đáy dưới
\draw[dashed, cyan, thick] (\a,0) arc [x radius=\a, y radius=\b, start angle=0, end angle=180];
\draw[cyan, thick] (-\a,0) arc [x radius=\a, y radius=\b, start angle=180, end angle=360];
% vẽ đáy trên
\draw[cyan, thick, fill = cyan!30] (0,\h) ellipse (\a cm and \b cm);
\end{tikzpicture}

```

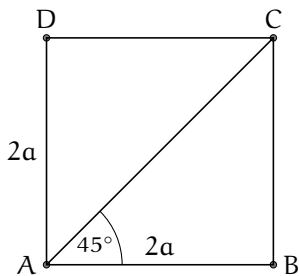


```

\begin{tikzpicture}[color=cyan]
\def\a{4} % bán trục lớn = bán kính trụ
\def\b{.8} % bán trục nhỏ
\def\h{6} % chiều cao trụ
% các chú thích
\coordinate (A) at (-\a,0);
\coordinate (B) at (\a,0);
\coordinate (S) at (0,\h);
\coordinate (O) at ($(A)!0.5!(B)$);

%\draw (0,\h)--(\a,\h) node[midway, above]{$r$};
\filldraw (0,\h) circle(1pt);
\draw[<->, xshift=1cm] (\a,0)--(\a,\h) node[midway, fill=white] {$h$};
\draw[gray] (\a,0) ++(0.5cm,0)--+(0.75cm,0)
(\a,\h) ++(0.5cm,0)--+(0.75cm,0);
% vẽ các cạnh bên
\draw[cyan, very thick] (\a,0)--(0,\h)node[above]{$S$}--(-\a,0);
\draw[cyan,dashed, thick] (\a,0) node[right]{$B$}--(O)node[below]{$O$}--(-\a,0)node[left]{$A$};
\draw[cyan,dashed, thick] (S)--(O);
%\fill[cyan!5] (-\a,0)--(-\a,\h) arc [x radius=\a, y radius=\b, start angle=-180, end angle=0] (\a,\h)--(\a,0);
% vẽ đáy dưới
\draw[dashed, cyan, thick] (\a,0) arc [x radius=\a, y radius=\b-0.05, start angle=0, end angle=180];
\draw[cyan, thick] (-\a,0) arc [x radius=\a, y radius=\b, start angle=180, end angle=360];
\tkzMarkRightAngles(B,S,A B,O,S)
\end{tikzpicture}

```

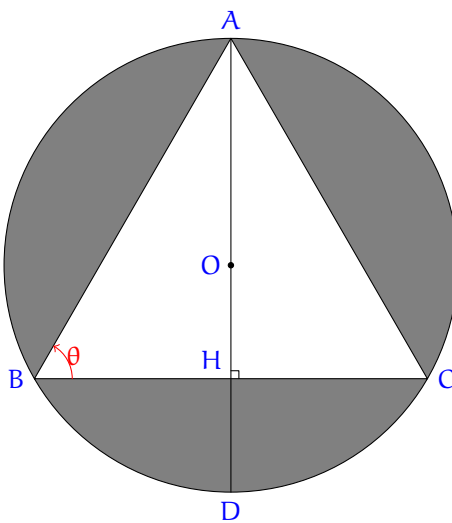




```

\begin{tikzpicture}
\tkzDefPoints{0/0/A,3/0/B}
\tkzDefSquare(A,B)
\tkzGetPoints{C}{D}
\tkzDrawPoints(A,B,C,D)
\tkzLabelPoints[left](A)
\tkzLabelPoints[right](B)
\tkzLabelPoints[above](C,D)
\tkzDrawSquare(A,B)
\tkzDrawSegments[(A,C)
\tkzLabelSegment[pos=.5,above](A,B){ $2a$}
\tkzLabelSegment[pos=.5,left](A,D){ $2a$}
\tkzMarkAngles[(B,A,C)
\tkzLabelAngle[pos=0.7](B,A,C){\footnotesize $45^\circ$}%
\end{tikzpicture}

```

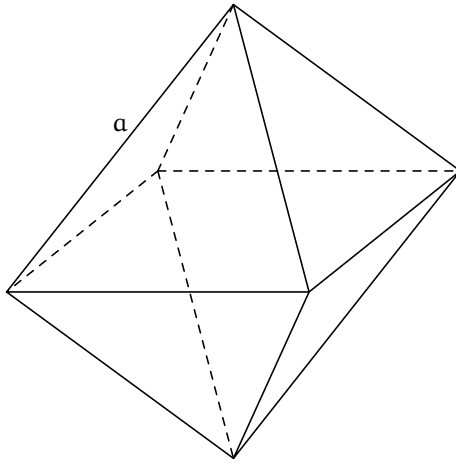


```

\begin{tikzpicture}[line join=round, line cap=round]
\def\r{3} % bán kính hình tròn
\coordinate (O) at (0,0);
\coordinate (A) at (90:\r);
\coordinate (B) at (210:\r);
\coordinate (C) at (-30:\r);
\coordinate (D) at (-90:\r);
\coordinate (H) at (intersection of A--D and B--C);
\filldraw [even odd rule, fill=gray]
(A)--(B)--(C)--cycle
(O) circle(\r);
\draw (H) ++(3pt,0)--++(0,3pt)--++(-3pt,0);
\draw (A)--(D);

\filldraw (O) node[left, blue]{$O$} circle(1pt);
\draw (A) node[above, blue]{$A$};
\draw (B) node[left, blue]{$B$};
\draw (C) node[right, blue]{$C$};
\draw (D) node[below, blue]{$D$};
\draw (H) node[above left, blue]{$H$};
\path (A) -- (B) -- (C) pic["$\theta$", draw,->, red, angle radius = 0.5cm, angle eccentricity = 1.2] {angle = }
\end{tikzpicture}

```

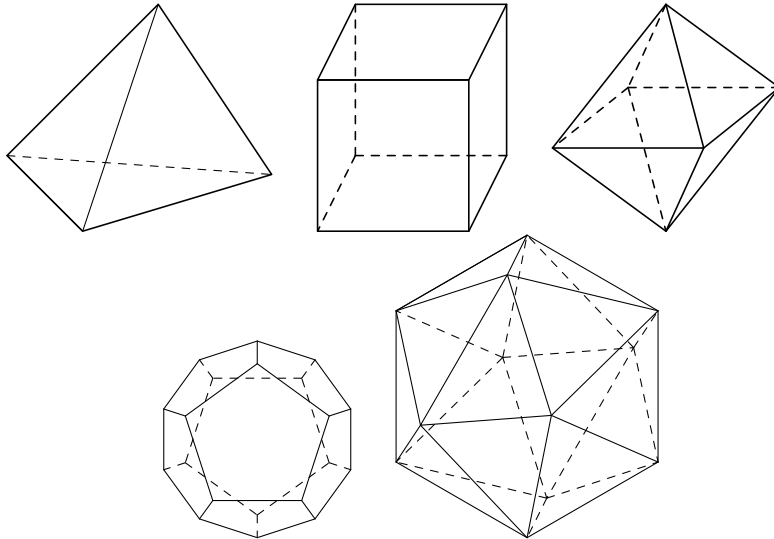


```

\begin{tikzpicture}[line cap=round,line join=round,color=cyan, line width = 2pt,scale=2]
\tkzDefPoints{0/0/O, -.5/.4/A, 1.5/.4/B}
\coordinate (S) at ($(O)+(0,1.5)$);
\tkzDefPointBy[symmetry = center O](A) \tkzGetPoint{C}
\tkzDefPointBy[symmetry = center O](B) \tkzGetPoint{D}
\tkzDefPointBy[symmetry = center O](S) \tkzGetPoint{S'}\tkzDefMidPoint(D,S)\tkzGetPoint{M}
\tkzDrawSegments[dashed](S,A A,B A,D A,S')
\tkzDrawPolygon(S,C,D)
\tkzDrawPolygon(S',B,C)
\tkzDrawSegments(S,B S',D)
\tkzLabelPoint[above=2pt](M){$a$}
\end{tikzpicture}

```

### 13.2 Các khối đa diện đều



## tứ diện

```

\begin{tikzpicture}[line cap=round,line join=round]
\tkzDefPoints{0/0/A, 1/-1/B, 3.5/-0.25/C, 2/2/D}
\draw [dashed](A) -- (C);
\tkzDrawPolygon(A,B,C,D)
\draw (A)-- (B);
\draw (B) -- (D);
\end{tikzpicture}

```

## lập phương

```

\begin{tikzpicture}[line cap=round,line join=round]
% Đáy ABCD
\tkzDefPoints{0/0/A, -0.5/-1/B, 2/0/D}
\coordinate (C) at ($(B)+(D)-(A)$);
% Đáy A'B'C'D'
\tkzDefPointBy[rotation = center A angle 90](D) \tkzGetPoint{A'}
% Phép quay tâm A, góc quay 90 độ, biến D thành A'
\coordinate (B') at ($(B)+(A')-(A)$);
\coordinate (D') at ($(D)+(A')-(A)$);
\coordinate (C') at ($(B')+(D')-(A')$);
%
\tkzDrawSegments[dashed](A,B A,D A,A')
\tkzDrawPolygon(A',B',C',D')
\tkzDrawPolygon(B,C,C',B')
\tkzDrawSegments(D,D' C,D)
\end{tikzpicture}

```

## bát diện

```

\begin{tikzpicture}[line cap=round,line join=round,color=cyan,very thick]
\tkzDefPoints{0/0/O, -.5/.4/A, 1.5/.4/B}
\coordinate (S) at ($(O)+(0,1.5)$);
\tkzDefPointBy[symmetry = center O](A) \tkzGetPoint{C}
\tkzDefPointBy[symmetry = center O](B) \tkzGetPoint{D}
\tkzDefPointBy[symmetry = center O](S) \tkzGetPoint{S'}
\tkzDrawSegments[dashed](S,A A,B A,D A,S')
\tkzDrawPolygon(S,C,D)
\tkzDrawPolygon(S',B,C)
\tkzDrawSegments(S,B S',D)
\end{tikzpicture}

```

mười hai diện

```

\begin{tikzpicture}[line cap=round,line join=round]
\foreach \x in {90, 162,..., 378}
{
\draw[dashed] (-\x :1)--(-\x + 72:1); %-hình ngũ giác mặt sau
\draw[dashed] (-\x :1)--(-\x :1.3); %Đoạn đi ra mặt sau
\draw (\x :1)--(\x + 72:1); %Hình ngũ giác mặt trước
\draw (\x :1)--(\x :1.3);%- đoạn đi ra mặt trước
\draw (\x :1.3)--(\x + 36:1.3); %--Hình thập giác
\draw (\x + 36:1.3)--(\x + 72:1.3); %--Hình thập giác
}
\end{tikzpicture}

```

hai mươi bốn diện

```

\begin{tikzpicture}[line cap=round,line join=round]
% Vẽ hình lục giác bao ngoài
\foreach \x in {90, 150,..., 450}
{
\draw (\x :2)--(\x + 60:2);
}
% Vẽ mặt trong
\foreach \x in {30, 90, 150}
{
\draw[dashed] (130 :.5)--(\x + 60 :2);
%Đỉnh bên trái phía trên của tam giác giữa mặt trong
}
\foreach \x in {150, 90, 30}
{
\draw[dashed] (20 :1.5)--(\x - 60 :2);
%---Đỉnh bên phải phía trên của tam giác giữa mặt trong
}
\foreach \x in {150, 210, 270}
{
\draw[dashed] (280 :1.5)--(\x + 60 :2);
%Đỉnh dưới của tam giác giữa mặt trong
}
\draw[dashed] (130 :.5) -- (20 :1.5) -- (280 :1.5) -- cycle;
%Tam giác giữa mặt trong
% vẽ mặt ngoài
\foreach \x in {210, 270, 330}
{
\draw (310 :.5)--(\x + 60 :2);
%Đỉnh bên phải phía dưới của tam giác giữa mặt ngoài
}
\foreach \x in {-30, 30, 90}
{
\draw (100 :1.5)--(\x + 60 :2);
% Đỉnh trên của tam giác giữa mặt ngoài
}
\foreach \x in {90, 150, 210}
{
\draw (200 :1.5)--(\x + 60 :2);
%Đỉnh bên trái phía dưới của tam giác ngoài
}
\draw (310 :.5) -- (100 :1.5) -- (200 :1.5) -- cycle;
% tam giác giữa mặt ngoài
\end{tikzpicture}

```

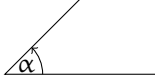
### 13.3 Thư viện “Angle Library”



```

\begin{tikzpicture}[]
\tikz \draw [line width=2mm]
(2,0) coordinate (A) -- (0,0) coordinate (B)
-- (1,1) coordinate (C)
pic [draw=blue, fill=blue!50, angle radius=1cm] {angle};
\end{tikzpicture}

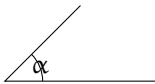
```



```

\begin{tikzpicture}[]
\tikz \draw (2,0) coordinate (A) -- (0,0) coordinate (B)
-- (1,1) coordinate (C)
pic ["$\alpha$", draw, ->] {angle};
\end{tikzpicture}

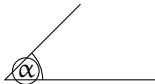
```



```

\begin{tikzpicture}[]
\tikz \draw (2,0) coordinate (A) -- (0,0) coordinate (B)
-- (1,1) coordinate (C)
pic ["$\alpha$", draw, angle eccentricity=1] {angle};
\end{tikzpicture}

```

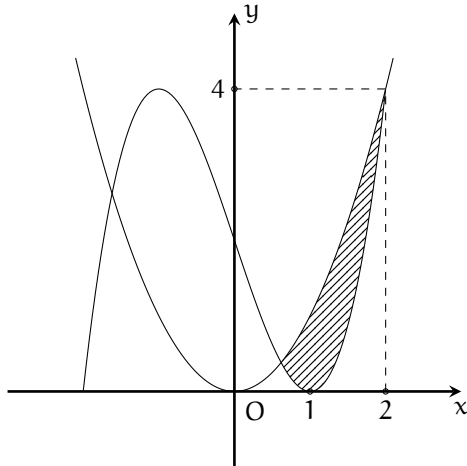


```

\begin{tikzpicture}[]
\tikz {
\draw (2,0) coordinate (A) -- (0,0) coordinate (B)
-- (1,1) coordinate (C)
pic (alpha) ["$\alpha$", draw] {angle};

\draw (alpha) circle [radius=5pt];
}
\end{tikzpicture}

```

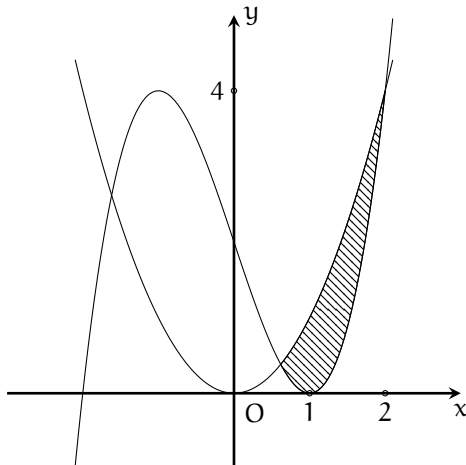
13.4 Tô miền bằng `\fillbetween`

```

\begin{tikzpicture}[>=stealth]
\draw[->,line width = 1pt] (-3,0)--(0,0) node[below right]{$O$}--(3,0) node[below]{$x$};
\draw[->,line width = 1pt] (0,-1)--(0,5) node[right]{$y$};
\draw (1,0) node[below]{$1$} circle (1pt);
\draw (2,0) node[below]{$2$} circle (1pt);
\draw (0,4) node[left]{$4$} circle (1pt);
\draw [samples=100, domain=-2.1:2.1] plot (\x, {(\x)^2});
\draw [samples=100, domain=-2:2] plot (\x, {(\x)^3-3*\x+2});
%\draw [samples=100, domain=0.8:2.1] plot (\x, {4*\x-4});
\fill [pattern = north east lines, line width = 2pt,draw=none](0.618034,0.38197) %
plot[domain=0.618034:2]
(\x, {(\x)^2}) (2,0) plot[domain=2:0.618034](\x, {(\x)^3-3*\x+2});
\draw [dashed] (2,0)--(2,4)--(0,4);
\end{tikzpicture}

```

Nếu thêm gói `\usepackage{pgfplots}`, `\usepgfplotslibrary{fillbetween}` sau gói TikZ, ta có cách tô đẹp hơn:



```

\begin{tikzpicture}[>=stealth]
\draw[->,line width = 1pt] (-3,0)--(0,0) node[below right]{$O$}--(3,0) node[below]{$x$};
\draw[->,line width = 1pt] (0,-1)--(0,5) node[right]{$y$};
\draw (1,0) node[below]{$1$} circle (1pt);
\draw (2,0) node[below]{$2$} circle (1pt);
\draw (0,4) node[left]{$4$} circle (1pt);
\draw [samples=100, domain=-2.1:2.1] plot (\x, {(\x)^2});
\draw [samples=100, domain=-2.1:2.1] plot (\x, {(\x)^3-3*\x+2});
\draw[name path = A, domain=0.618034:2,smooth] plot (\x, {(\x)^2});
\draw[name path = B, domain=0.618034:2,smooth] plot (\x, {(\x)^3-3*\x+2});
\tikzfillbetween[
of=A and B,split
] {pattern=north west lines};
\end{tikzpicture}

```

## Phần IV.

# Sử dụng gói tkz-tab vẽ bảng biến thiên

### 14 GIỚI THIỆU

Gói lệnh tkz-tab là gói lệnh chuyên dùng để vẽ bảng biến thiên và bảng xét dấu cực kỳ mạnh và chuẩn. Gói lệnh này nằm trong bộ gói lệnh tổng quát tkz.sty của tác giả Alain Matthes hiện đã có trên CTAN (có nghĩa là khi bạn cài MikTeX hay TexLive là đã có cho bạn sài rồi, không cần phải add thêm nữa, bạn chỉ việc khai báo nữa thôi là ok!!!!).

### 15 KHAI BÁO GÓI LỆNH

Để sử dụng được gói lệnh, bạn cần khai báo gói lệnh tkz-tab bằng dòng lệnh `\usepackage{tkz-tab}` trước khai báo `\begin{document}`.

### 16 CÁCH SỬ DỤNG

```

\begin{tikzpicture}
\tkzTabInit[<tùy chọn>]
{<đôi số hàng>}
{<đôi số cột>}
\tkzTabLine{<đôi số các cột và ô trong một hàng>}
\tkzTabVar[<tùy chọn>]{<định dạng mũi tên chéo, ngang, ...>}
\end{tikzpicture}

```



### 16.1 Các tùy chọn trong tkzTabInit

- `lgt`: Bề rộng cột thứ nhất, mặc định là 2 cm.
- `espcl`: Bề rộng từ cột thứ hai trở đi, mặc định 2 cm.
- `lw`: Nét kẻ bảng, mặc định 0.4 pt.
- `nocadre`: Không có đường kẻ quanh ngoài bảng, mặc định false.
- `color`: Màu bảng có hay không, mặc định false.
- `colorC`: Màu cột thứ nhất, mặc định white.
- `colorL`: Màu hàng thứ nhất, mặc định white.
- `colorV`: Màu của các biến trong bảng, mặc định white.
- `colorT`: Màu bên trong bảng, mặc định white.

### 16.2 Các đối số quan trọng trong tkzTabLine

- `+`: Ô mang dấu +.
- `-`: Ô mang dấu -.
- `z`: Đường đứng chấm chấm xuyên qua số 0.

```

\begin{center}
\begin{tikzpicture}
\tkzTabInit[lgt=3,espcl=2]
{\$x\$ /1, \$x^2-4x+3\$ /1}
{\$-\infty$, \$1$, \$3$, \$+\infty\$}
\tkzTabLine{ ,+,z,-,z,+ , }
\end{tikzpicture}
\end{center}

```

$x$	$-\infty$	$1$	$3$	$+\infty$	
$x^2 - 4x + 3$	+	0	-	0	+

- `d`: Kẻ 2 đường đứng nét liền.

```

\begin{center}
\begin{tikzpicture}
\tkzTabInit[lgt=3,espcl=2]
{\$x\$ /1, \$\dfrac{1}{x-2018}\$ /1.3}
{\$-\infty$, \$2018$, \$+\infty\$}
\tkzTabLine{ ,-,d,+ , }
\end{tikzpicture}
\end{center}

```

$x$	$-\infty$	$2018$	$+\infty$
$\frac{1}{x-2018}$	-	+	

- **t**: Kẻ 1 đường đứng chấm chấm.

```

\begin{center}
\begin{tikzpicture}
\tkzTabInit[lgt=3,espcl=2]
{\$x\$ /1, \$x-1\$ /1, \$2-x\$ /1, \$\frac{x-1}{2-x}\$ /1.5}
{\$-\infty$, \$1$, \$2$, \$+\infty\$}
\tkzTabLine{ ,-,z,+,t,+ }
\tkzTabLine{ ,+,t,+,z,- }
\tkzTabLine{ ,-,z,+,d,- }
\end{tikzpicture}
\end{center}

```

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+	+
$2 - x$	+	+	0	-
$\frac{x-1}{2-x}$	-	0	+	-

- **h**: Tô đường kẻ ô.

```

\begin{center}
\begin{tikzpicture}
\tkzTabInit[lgt=2,espcl=3]
{\$x\$ /1, \$\sqrt{1-x^2}\$ /1}
{\$-\infty$, \$-1$, \$1$, \$+\infty\$}
\tkzTabLine{,h,z,+,z,h,}
\end{tikzpicture}
\end{center}

```

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$\sqrt{1-x^2}$		0	+	0

- Đặt lại các đối số:

Ví dụ 1. Đặt lại **t** để có đường đứng đứt đoạn

```

\begin{center}
\begin{tikzpicture}
\tikzset{t style/.style = {style = dashed}}
\tkzTabInit[lgt=1.2,espcl=1.5]
{\$x\$ / 1, \$f(x)\$ /1 }%
{\$x_1$, \$x_2$, \$x_3\$ }%
\tkzTabLine{ t, , t, , t }
\end{tikzpicture}
\end{center}

```

$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$f(x)$	⋮	⋮	⋮

Ví dụ 2. Đặt lại **t** và dùng kiểu **z** để có 0

```
\begin{center}
\begin{tikzpicture}
\tikzset{t style/.style = {style = densely dashed}}
\tkzTabInit[lgt=1.2,espcl=1.5]
{ $x$  /1,  $f(x)$  /1}
{ $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ }
\tkzTabLine{z, ,z, ,z}
\end{tikzpicture}
\end{center}
```

$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$f(x)$	0	0	0


Ví dụ 3. Đặt lại **h** để tô màu một cột

```
\begin{center}
\begin{tikzpicture}
\tikzset{h style/.style = {fill=black!50}}
\tkzTabInit[lgt=1.2,espcl=1.5]
{ $x$  /1,  $f(x)$  /1}
{0$, $1$, $2$, $3$}
\tkzTabLine{z, +, d, h, d, -, t}
\end{tikzpicture}
\end{center}
```

$x$	0	1	2	3
$f(x)$	0	+		-

Ví dụ 4. Đặt lại **h** để tô một cột với kiểu lạ mắt hơn

```
\begin{center}
\begin{tikzpicture}
\tikzset{h style/.style = {pattern=checkerboard}}
\tkzTabInit[lgt=1.2,espcl=1.5]
{ $x$  /1,  $f(x)$  /1}
{0$, $1$, $2$, $3$}
\tkzTabLine{z, +, ,h, d, -, t}
\end{tikzpicture}
\end{center}
```

x	0	1	2	3
f(x)	0	+		-

### 16.3 Các định dạng quan trọng trong tkzTabVar

- Các định dạng mặc định:

Ví dụ 5. Sử dụng  $-/$  và  $+/$  để chỉ chiều của dấu mũ tên

```
\begin{center}
\begin{tikzpicture}[>=stealth]
\tkzTabInit[lgt=1.2,espc1=3]
{ $x$ /1,$f'(x)$ /1,$f(x)$ /1.5}
{ $-\infty$, $0$, $+\infty$}
\tkzTabLine{ -,z,+, }
\tkzTabVar{+/$+\infty$, -/$0$, +/$+\infty$}
\end{tikzpicture}
\end{center}
```

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)		-	+
f(x)	$+\infty$	0	$+\infty$

Ví dụ 6. Sử dụng **R**

```
\begin{center}
\begin{tikzpicture}[>=stealth]
\tkzTabInit[lgt=1.2,espc1=3]
{ $x$ /1,$f'(x)$ /1,$f(x)$ /2}
{ $-\infty$, $x_0$, $+\infty$}
\tkzTabLine{ +,z,+, }
\tkzTabVar{-/$-\infty$,R,+/$+\infty$}
\end{tikzpicture}
\end{center}
```

x	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$
f'(x)		+	+
f(x)	$-\infty$		$+\infty$

Ví dụ 7. Sử dụng **D** kẻ 2 đường đứng nét liền

```

\begin{center}
\begin{tikzpicture}[>=stealth]
\tkzTabInit[lgt=1.2,espcl=3]
{\$x$ /1,$f'(x)$ /1,$f(x)$ /2.5}
{\$0$,$1$,$2$,$+\infty$}
\tkzTabLine{t,-,d,-,z,+,%}
\tkzTabVar{+/$a$ , -D+/$b$/$c$ , -/$d$ , +D/$e$}
\end{tikzpicture}
\end{center}

```

x	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	⋮	-	- 0 +	
$f(x)$	a	c	d	e

Ví dụ 8. Sử dụng **C**

```

\begin{center}
\begin{tikzpicture}[>=stealth]
\tkzTabInit[lgt=1,espcl=2.5]
{/0.5, /2}
{\$a$,$b$,$c$}
\tkzTabVar{D+/$m$ , +CD-/$n$/$p$ , +D/$q$}
\end{tikzpicture}
\end{center}

```

	a	b	c
	m	n	q
		p	

Ví dụ 9. Sử dụng **H** để tô đường kẻ ô

```

\begin{center}
\begin{tikzpicture}[>=stealth,scale=1]
\tkzTabInit[lgt=1.5,espcl=2]
{\$x$ /1,$f'(x)$ /1,$f(x)$ /2.5}
{\$-\infty$,$a$,$b$,$c$,$+\infty$}
\tkzTabLine{,-,d,h,d,-,z,+,%}
\tkzTabVar{+/$+\infty$,-DH/$-\infty$ , D+/$m$,-/$n$ , +/$+\infty$}
\end{tikzpicture}
\end{center}

```

$x$	$-\infty$	$a$	$b$	$c$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$			$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$+\infty$			$m$		$+\infty$
					$n$	

### Ví dụ 10. Sử dụng **V**

```

\begin{center}
\begin{tikzpicture}[>=stealth]
\tkzTabInit[lgt=1,espcl=2.5]
{ /0.5, /2}
{ $a$, $b$, $c$ }
\tkzTabVar{+ / $m$, -V- / $n$ / $p$, + / $q$ }
\end{tikzpicture}
\end{center}

```

	$a$	$b$	$c$
	$m$		$q$
		$n$	$p$

- Định dạng lại phong cách:

### Ví dụ 11. Đặt lại **H**

```

\begin{center}
\begin{tikzpicture}[>=stealth]
\tkzset{h style/.style = {fill=yellow}}
\tkzTabInit[lgt=1,espcl=2]
{ $x$ /1, $f(x)$ /2}
{ $a$, $b$, $c$, $d$ }
\tkzTabVar{+ / $m$, -CH/ $n$, +C/ $p$, - / $q$ }
\end{tikzpicture}
\end{center}

```

$x$	$a$	$b$	$c$	$d$
$f(x)$	$m$		$p$	
		$n$		$q$

Ví dụ 12. Định nghĩa lại mũi tên

```

\begin{center}
\begin{tikzpicture}[>=stealth]
\tkzset{arrow style/.style = {magenta,->,>= latex}}
\tkzTabInit[espcl=3]
{\$x\$ /1, \$\ln x +1\$ /1, \$x \ln x\$ /2.5}
{\$0\$ ,\$1/e\$ , \$+\infty\$}
\tkzTabLine{d,-,z,+}
\tkzTabVar{ D+/\$0\$ , -/\$-\dfrac{1}{e}\$, +/\$+\infty\$}
\end{tikzpicture}
\end{center}

```

x	0	1/e	+∞
ln x + 1	-	0	+
x ln x	0	- 1/e	+∞

17 MẪU MỘT SỐ BẢNG XÉT DẤU

17.1 Hàm số bậc nhất y = f(x) = ax + b (a ≠ 0)

```

\begin{center}
\begin{tikzpicture}[>=stealth,scale=1]
\tkzTabInit[lgt=1.2,espcl=3,color,colorC=orange!20,colorL=green!20,%
colorV=lightgray!20,colorT=yellow!20]
{\$x\$ /1, \$f(x)\$ /1}
{\$-\infty\$, \$-\dfrac{b}{a}\$, \$+\infty\$}
\text{trái dấu với a},z,\text{cùng dấu với a}, }
\end{tikzpicture}
\end{center}

```

x	-∞	- b/a	+∞
f(x)	trái dấu với a	0	cùng dấu với a

17.2 Hàm số bậc hai y = f(x) = ax<sup>2</sup> + bx + c (a ≠ 0)

TH1: f(x) = 0 vô nghiệm.

```

\begin{center}
\begin{tikzpicture}[>=stealth,scale=1]
\tkzTabInit[lgt=1.2,espcl=3,color,colorC=orange!20,colorL=green!20,%
colorV=lightgray!20,colorT=yellow!20]
{\$x\$ /1, \$f(x)\$ /1}
{\$-\infty\$, \$+\infty\$}

```

```
\tkzTabLine{ , \text{cùng dấu với a}, }
\end{tikzpicture}
\end{center}
```

x	$-\infty$ <span style="margin-left: 100px;"><math>+\infty</math></span>
f(x)	cùng dấu với a

TH2:  $f(x) = 0$  có nghiệm kép  $x = x_0$ .

```
\begin{center}
\begin{tikzpicture}[>=stealth,scale=1]
\tkzTabInit[lgt=1.2,espcl=3,color,colorC=orange!20,colorL=green!20,%
colorV=lightgray!20,colorT=yellow!20]
{\$x$ /1, \$f(x)$ /1}
{\$-\infty$, \$x_0$, \$+\infty$}
\tkzTabLine{ , \text{cùng dấu với a} },z, \text{ cùng dấu với a}, }
\end{tikzpicture}
\end{center}
```

x	$-\infty$ <span style="margin-left: 100px;"><math>x_0</math></span> <span style="margin-left: 100px;"><math>+\infty</math></span>
f(x)	cùng dấu với a <span style="margin-left: 20px;">0</span> cùng dấu với a

TH3:  $f(x) = 0$  có 2 nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$ .

```
\begin{center}
\begin{tikzpicture}[>=stealth,scale=1]
\tkzTabInit[lgt=1.2,espcl=3,color,colorC=orange!20,colorL=green!20,%
colorV=lightgray!20,colorT=yellow!20]
{\$x$ /1, \$f(x)$ /1}
{\$-\infty$, \$x_1$, \$x_2$, \$+\infty$}
\tkzTabLine{ , \text{cùng dấu với a} },z,%
\text{ trái dấu với a},z, \text{ cùng dấu với a}, }
\end{tikzpicture}
\end{center}
```

x	$-\infty$ <span style="margin-left: 100px;"><math>x_1</math></span> <span style="margin-left: 100px;"><math>x_2</math></span> <span style="margin-left: 100px;"><math>+\infty</math></span>
f(x)	cùng dấu với a <span style="margin-left: 20px;">0</span> trái dấu với a <span style="margin-left: 20px;">0</span> cùng dấu với a

## 18 MẪU MỘT SỐ BẢNG BIẾN THIÊN

### 18.1 Hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ( $a \neq 0$ )

Ta có:  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$ ,  $\Delta'_f = b^2 - 3ac$ . Do đó:

TH1: Khi  $a > 0$  và  $b^2 - 3ac > 0$  thì bảng biến thiên của hàm số có dạng như sau:



```
\begin{tikzpicture}[>=stealth,scale=1]
\tkzTabInit[lgt=1.2,espcl=3,color,colorC=orange!20,colorL=green!20,%
colorV=lightgray!20,colorT=yellow!20]
{\$x\$ /1.2, \$f'(x)\$ /1.2, \$f(x)\$ /2.5}
{\$-\infty\$, \$x_1\$, \$x_2\$, \$+\infty\$}
\tkzTabLine{ ,+,z,-,z,+ , }
\tkzTabVar{-/\$-\infty\$, +/\$f(x_1)\$, -/\$f(x_2)\$, +/\$+\infty\$}
\end{tikzpicture}
```

x	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	$-\infty$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$+\infty$	

Ở đây  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$ ,  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$  là 2 nghiệm của pt  $f'(x) = 0$

TH2: Khi  $a < 0$  và  $b^2 - 3ac > 0$  thì bảng biến thiên của hàm số có dạng như sau:

```
\begin{tikzpicture}[>=stealth,scale=1]
\tkzTabInit[lgt=1.2,espcl=3,color,colorC=orange!20,colorL=green!20,%
colorV=lightgray!20,colorT=yellow!20]
{\$x\$/1.2, \$f'(x)\$/1.2, \$f(x)\$/2.5}
{\$-\infty\$, \$x_1\$, \$x_2\$, \$+\infty\$}
\tkzTabLine{ ,-,z,+,z,- , }
\tkzTabVar{+/\$+\infty\$, -/\$f(x_1)\$, +/\$f(x_2)\$, -/\$-\infty\$}
\end{tikzpicture}
```

x	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
f'(x)	-	0	+	0	-
f(x)	$+\infty$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$-\infty$	

Ở đây  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$ ,  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$  là 2 nghiệm của pt  $f'(x) = 0$

TH3: Khi  $a > 0$  và  $b^2 - 3ac < 0$  thì bảng biến thiên của hàm số có dạng như sau:

```
\begin{tikzpicture}[>=stealth,scale=1]
\tkzTabInit[lgt=1.2,espcl=4,color,colorC=orange!20,colorL=green!20,%
colorV=lightgray!20,colorT=yellow!20]
{\$x\$/1, \$f'(x)\$/1, \$f(x)\$/1.5}
{\$-\infty\$, \$+\infty\$}
\tkzTabLine{ ,z,z , }
\tkzTabVar{+/\$+\infty\$, -/\$-\infty\$}
\end{tikzpicture}
```

```
{\$-\infty$, \$+\infty$}
\tkzTabLine{ ,+, }
\tkzTabVar{-/\$-\infty$, +/\$+\infty$}
\end{tikzpicture}
```

x	$-\infty$ <span style="float: right;"><math>+\infty</math></span>
f'(x)	+
f(x)	$-\infty$ <span style="float: right;"><math>+\infty</math></span>

TH4: Khi  $a < 0$  và  $b^2 - 3ac < 0$  thì bảng biến thiên của hàm số có dạng như sau:

```
\begin{tikzpicture}[>=stealth,scale=1]
\tkzTabInit[lgt=1.2,espcl=4,color,colorC=orange!20,colorL=green!20,%
colorV=lightgray!20,colorT=yellow!20]
{\$x$/1, \$f'(x)}/1, \$f(x)}/1.5}
{\$-\infty$, \$+\infty$}
\tkzTabLine{ ,-, }
\tkzTabVar{+/\$+\infty$, -/\$-\infty$}
\end{tikzpicture}
```

x	$-\infty$ <span style="float: right;"><math>+\infty</math></span>
f'(x)	-
f(x)	$+\infty$ <span style="float: right;"><math>-\infty</math></span>

TH5: Khi  $a > 0$  và  $b^2 - 3ac = 0$  thì bảng biến thiên của hàm số có dạng như sau:

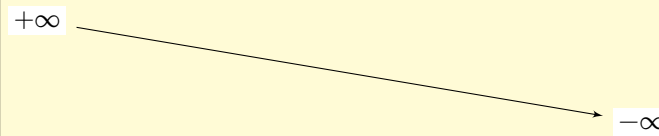
```
\begin{tikzpicture}[>=stealth,scale=1]
\tkzTabInit[lgt=1.2,espcl=4,color,colorC=orange!20,colorL=green!20,%
colorV=lightgray!20,colorT=yellow!20]
{\$x$/1, \$f'(x)}/1, \$f(x)}/2}
{\$-\infty$, \$x_0$, \$+\infty$}
\tkzTabLine{ ,+,z,+, }
\tkzTabVar{-/\$-\infty$, R, +/\$+\infty$}
\end{tikzpicture}
```

x	$-\infty$ <span style="float: right;"><math>x_0</math> <math>+\infty</math></span>
f'(x)	+ <span style="float: right;">0</span> +
f(x)	$-\infty$ <span style="float: right;"><math>+\infty</math></span>

Ở đây  $x_0 = \frac{-b}{3a}$  là nghiệm kép của pt  $f'(x) = 0$

TH6: Khi  $a < 0$  và  $b^2 - 3ac = 0$  thì bảng biến thiên của hàm số có dạng như sau:

```
\begin{tikzpicture}[>=stealth,scale=1]
\tkzTabInit[lgt=1.2,espcl=4,color,colorC=orange!20,colorL=green!20,%
colorV=lightgray!20,colorT=yellow!20]
{\$x\$/1,\$f'(x)\$/1,\$f(x)\$/2}
{\$-\infty\$, \$x_0\$, \$+\infty\$}
\tkzTabLine{ ,-,z,-, }
\tkzTabVar{+/\$+\infty\$,R,-/\$-\infty\$}
\end{tikzpicture}
```

$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	$+\infty$		

Ở đây  $x_0 = \frac{-b}{3a}$  là nghiệm kép của phương trình  $f'(x) = 0$

**18.2 Hàm trùng phương  $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$  ( $a \neq 0$ )**

Ta có:  $f'(x) = 4ax^3 + 2bx = 4ax \left( x^2 + \frac{b}{2a} \right)$ ,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{-b}{2a} \end{cases}$ . Do đó:

TH1: Khi  $a > 0$  và  $b < 0$  thì bảng biến thiên của hàm số có dạng như sau:

```
\begin{tikzpicture}[>=stealth,scale=1]
\tkzTabInit[lgt=1.2,espcl=3,color,colorC=orange!20,colorL=green!20,%
colorV=lightgray!20,colorT=yellow!20]
{\$x\$/1.2,\$f'(x)\$/1.2,\$f(x)\$/3}
{\$-\infty\$, \$x_1\$, \$0\$, \$x_2\$, \$+\infty\$}
\tkzTabLine{ ,-,z,+,z,-,z,+ }
\tkzTabVar{+/\$+\infty\$, -/\$f(x_1)\$, +/\$c\$, -/\$f(x_2)\$, +/\$+\infty\$}
\end{tikzpicture}
```

$x$	$-\infty$	$x_1$	$0$	$x_2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(x_1)$	$c$	$f(x_2)$	$+\infty$

Ở đây  $x_1 = -\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ ,  $x_2 = \sqrt{\frac{-b}{2a}}$  là 2 nghiệm của phương trình  $x^2 = \frac{-b}{2a}$

TH2: Khi  $a < 0$  và  $b > 0$  thì bảng biến thiên của hàm số có dạng như sau:

```

\begin{tikzpicture}[>=stealth,scale=1]
\tkzTabInit[lgt=1.2,espcl=3,color,colorC=orange!20,colorL=green!20,%
colorV=lightgray!20,colorT=yellow!20]
{\$x\$/1.2,\$f'(x)\$/1.2,\$f(x)\$/3}
{\$-\infty\$, \$x_1\$, \$0\$, \$x_2\$, \$+\infty\$}
\tkzTabLine{ ,+,z,-,z,+,z,-, }
\tkzTabVar{-/\$-\infty\$, +/\$f(x_1)\$, -/\$c\$, +/\$f(x_2)\$, -/\$-\infty\$}
\end{tikzpicture}

```

x	$-\infty$	$x_1$	$0$	$x_2$	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	$-\infty$	↗ f(x <sub>1</sub> )	↘ c	↗ f(x <sub>2</sub> )	↘ $-\infty$

Ở đây  $x_1 = -\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ ,  $x_2 = \sqrt{\frac{-b}{2a}}$  là 2 nghiệm của phương trình  $x^2 = \frac{-b}{2a}$

TH3: Khi  $a > 0$  và  $b \geq 0$  thì bảng biến thiên của hàm số có dạng như sau:

```

\begin{tikzpicture}[>=stealth,scale=1]
\tkzTabInit[lgt=1.2,espcl=4,color,colorC=orange!20,colorL=green!20,%
colorV=lightgray!20,colorT=yellow!20]
{\$x\$/1,\$f'(x)\$/1,\$f(x)\$/2}
{\$-\infty\$, \$0\$, \$+\infty\$}
\tkzTabLine{ ,-,z,+, }
\tkzTabVar{+/\$+\infty\$, -/\$c\$, +/\$+\infty\$}
\end{tikzpicture}

```

x	$-\infty$	$0$	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$	↘ c	↗ $+\infty$

TH4: Khi  $a < 0$  và  $b \leq 0$  thì bảng biến thiên của hàm số có dạng như sau:

```

\begin{tikzpicture}[>=stealth,scale=1]
\tkzTabInit[lgt=1.2,espcl=4,color,colorC=orange!20,colorL=green!20,%
colorV=lightgray!20,colorT=yellow!20]
{\$x\$/1,\$f'(x)\$/1,\$f(x)\$/2}
{\$-\infty\$, \$0\$, \$+\infty\$}
\tkzTabLine{ ,+,z,-, }
\tkzTabVar{-/\$-\infty\$, +/\$c\$, -/\$-\infty\$}
\end{tikzpicture}

```

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f(x)	$-\infty$	c	$-\infty$

**18.3 Hàm phân thức  $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  với  $c \neq 0$  và  $ad - bc \neq 0$**

Ta có:  $f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$ . Do đó:

TH1: Khi  $ad - bc > 0$  thì bảng biến thiên của hàm số có dạng như sau:

```

\begin{tikzpicture}[>=stealth,scale=1]
\tkzTabInit[lgt=1.2,espcl=3,color,colorC=orange!20,colorL=green!20,%
colorV=lightgray!20,colorT=yellow!20]
{\$x\$/1.2,\$f'(x)\$/1.2,\$f(x)\$/2.5}
{\$-\infty\$, \$-\dfrac{d}{c}\$, \$+\infty\$}
\tkzTabLine{ ,+,d,+ ,}
\tkzTabVar{-/\dfrac{a}{c}\$, +D-/\$+\infty\$/\$-\infty\$, +/\dfrac{a}{c}\$}
\end{tikzpicture}

```

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
f'(x)	+	+	+
f(x)	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$\frac{a}{c}$

TH2: Khi  $ad - bc < 0$  thì bảng biến thiên của hàm số có dạng như sau:

```

\begin{tikzpicture}[>=stealth,scale=1]
\tkzTabInit[lgt=1.2,espcl=3,color,colorC=orange!20,colorL=green!20,%
colorV=lightgray!20,colorT=yellow!20]
{\$x\$/1.2,\$f'(x)\$/1.2,\$f(x)\$/2.5}
{\$-\infty\$, \$-\dfrac{d}{c}\$, \$+\infty\$}
\tkzTabLine{ ,-,d,- ,}
\tkzTabVar{+/\dfrac{a}{c}\$, -D+/\$-\infty\$/\$+\infty\$, -/\dfrac{a}{c}\$}
\end{tikzpicture}

```

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
f'(x)	-	-	-
f(x)	$\frac{a}{c}$ ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ $\frac{a}{c}$

**18.4** Hàm phân thức  $y = f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$  với  $ad \neq 0$  và  $a\left(\frac{-e}{d}\right)^2 + b\left(\frac{-e}{d}\right) + c \neq 0$

Ta có  $f'(x) = \frac{adx^2 + 2aex + be - cd}{(dx + e)^2} = \frac{g(x)}{(dx + e)^2}$ .

Xét phương trình  $g(x) = adx^2 + 2aex + be - cd = 0$ . Ta có:

$$\Delta'_g = (ae)^2 - ad(be - cd) = a(ae^2 - bde + cd^2)$$

Do đó:

TH1: Nếu  $\Delta'_g > 0$  và  $ad > 0$  thì bảng biến thiên của hàm số có dạng như sau:

```
\begin{tikzpicture}[>=stealth,scale=1]
\tkzTabInit[lgt=1.2,espcl=3,color,colorC=orange!20,colorL=green!20,%
colorV=lightgray!20,colorT=yellow!20]
{\$x\$/1.2,\$f'(x)\$/1.2,\$f(x)\$/2.5}
{\$-\infty\$, \$x_1\$, \$-\frac{d}{c}\$, \$x_2\$, \$+\infty\$}
\tkzTabLine{ ,+,z,-,d,-,z,+ , }
\tkzTabVar{-/\$-\infty\$,+/\$f(x_1)\$, -D+/\$-\infty\$/\$+\infty\$, -/\$f(x_2)\$, %
+/\$+\infty\$}
\end{tikzpicture}
```

x	$-\infty$	$x_1$	$-\frac{d}{c}$	$x_2$	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	-	0	+
f(x)	$-\infty$ ↗	$f(x_1)$	↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘	$f(x_2)$	↗ $+\infty$

Ở đây  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) là 2 nghiệm của phương trình  $g(x) = 0$

TH2: Nếu  $\Delta'_g > 0$  và  $ad < 0$  thì bảng biến thiên của hàm số có dạng như sau:

```
\begin{tikzpicture}[>=stealth,scale=1]
\tkzTabInit[lgt=1.2,espcl=3,color,colorC=orange!20,colorL=green!20,%
colorV=lightgray!20,colorT=yellow!20]
{\$x\$/1.2,\$f'(x)\$/1.2,\$f(x)\$/2.5}
{\$-\infty\$, \$x_1\$, \$-\frac{d}{c}\$, \$x_2\$, \$+\infty\$}
```

```
\tkzTabLine{ ,-,z,+,d,+,z,-, }
\tkzTabVar{+/$+\infty$, -/$f(x_1)$, +D-/$+\infty$/-$\infty$, +/$f(x_2)$, %
-/$-\infty$}
\end{tikzpicture}
```

x	$-\infty$		$x_1$	$-\frac{d}{c}$	$x_2$	$+\infty$	
$f'(x)$			-	0	+		
$f(x)$	$+\infty$	$f(x_1)$		$+\infty$	$-\infty$	$f(x_2)$	$-\infty$

Ở đây  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) là 2 nghiệm của phương trình  $g(x) = 0$

TH3: Nếu  $\Delta'_g < 0$  và  $ad > 0$  thì bảng biến thiên của hàm số có dạng như sau:

```
\begin{tikzpicture}[>=stealth,scale=1]
\tkzTabInit[lgt=1.2,espcl=3,color,colorC=orange!20,colorL=green!20,%
colorV=lightgray!20,colorT=yellow!20]
{ $x$/1.2,$f'(x)$/1.2,$f(x)$/2 }
{ $-\infty$, $-\frac{e}{d}$, $+\infty$ }
\tkzTabLine{ ,+,d,+ }
\tkzTabVar{-/$-\infty$, +D-/$+\infty$/-$\infty$, +/$+\infty$}
\end{tikzpicture}
```

x	$-\infty$		$-\frac{e}{d}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+		+		
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$+\infty$

TH4: Nếu  $\Delta'_g < 0$  và  $ad < 0$  thì bảng biến thiên của hàm số có dạng như sau:

```
\begin{tikzpicture}[>=stealth,scale=1]
\tkzTabInit[lgt=1.2,espcl=3,color,colorC=orange!20,colorL=green!20,%
colorV=lightgray!20,colorT=yellow!20]
{ $x$/1.2,$f'(x)$/1.2,$f(x)$/2 }
{ $-\infty$, $-\frac{e}{d}$, $+\infty$ }
\tkzTabLine{ ,-,d,- }
\tkzTabVar{+/$+\infty$, -D+/$-\infty$/+$\infty$, -/$-\infty$}
\end{tikzpicture}
```

$x$	$-\infty$	$-\frac{e}{d}$	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$-\infty$

## 19 TẠM KẾT

Hy vọng tài liệu nhỏ này giúp được thầy cô phần nào vẽ được hình trong TikZ và tkz-euclide, cũng như tạo bảng biến thiên đẹp và đầy đủ. Thầy cô nghiên cứu thêm 4 tài liệu tham khảo bên dưới để hiểu rõ thêm lệnh vì tài liệu này còn rất đơn sơ và thiếu sót. Mọi góp ý về sai sót xin gửi thư hoặc inbox tác giả.

## 20 TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. TikZ manual 3.0.1a, Till Tantau, [ctan.org](http://ctan.org), 29/08/2015
2. tkz-euclide screen 1.16c (manual), Alter Mundus, [ctan.org](http://ctan.org), 2011
3. tkz-tab screen (Tkz-Tab 1.1c), AlterMundus [sorengard.com](http://sorengard.com)
4. Gói lệnh tkz-tab.sty - Làm bảng biến thiên, Nguyễn Hữu Điển